соображения позволяют доказывать теоремы для локально компактного случая, опираясь на аналогию с компактным случаем.

Определение. Пусть X — локально компактное пространство. Алгебра $\varkappa(X)$ **непрерывных функций с компактным носителем** есть множество функций, исчезающих вне некоторого компактного множества (вообще говоря, своего для каждой функции). Алгебра $C_\infty(X)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞, есть множество функций $f \in C(X)$, обладающих тем свойством, что при любом $\varepsilon > 0$ существует компактное множество $D_\varepsilon \subset X$, такое, что $|f(x)| < \varepsilon$, если $x \notin D_\varepsilon$. Таким образом,

$$\varkappa(X) \subset C_\infty(X) \subset C(X).$$

Из теоремы IV.14 следует

Теорема IV.18 (теорема Рисса — Маркова). Пусть X — локально компактное пространство. Положительный линейный функционал на $\varkappa(X)$ имеет вид $l(f) = \int f\,d\mu$ с некоторой мерой Бэра μ. Положительные линейные функционалы на $C_\infty(X)$ порождаются мерами μ с конечной полной массой, т. е. $\sup\limits_{A \in \mathscr{B}} \mu(A) < \infty$.

В следующей главе мы найдем топологию на $\varkappa(X)$, в которой сопряженное к $\varkappa(X)$ будет в точности пространством комплексных бэровых мер. Заметим, что эта топология *не* задается нормой $\|\cdot\|_\infty$. Пространство $\varkappa(X)$ не полно по норме $\|\cdot\|_\infty$; его пополнением будет $C_\infty(X)$, а его сопряженным по норме $\|\cdot\|_\infty$ — пространство *конечных* мер.

IV.5. Слабые топологии на банаховых пространствах

Определение. Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. **Слабой топологией** на X называется слабейшая топология на X, в которой непрерывен каждый функционал l из X^*.

Таким образом, база окрестностей нуля для слабой топологии задается множествами вида

$$N(l_1, \ldots, l_n; \varepsilon) = \{x \mid |l_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

т. е. окрестности нуля содержат цилиндры с конечномерными открытыми основаниями. Направленность $\{x_\alpha\}$ слабо сходится к x (записывается $x_\alpha \xrightarrow{w} x$) тогда и только тогда, когда $l(x_\alpha) \to l(x)$ для всех $l \in X^*$.

В бесконечномерных банаховых пространствах слабая топология не порождается никакой метрикой. Это одна из главных причин, по которым мы ввели топологические пространства. Прежде чем перейти к примерам, укажем три элементарных свойства слабой топологии.

Предложение. (а) Слабая топология слабее, чем топология нормы, и, значит, всякое слабо открытое множество открыто по норме.

(b) Всякая слабо сходящаяся *последовательность* ограничена по норме.

(c) Слабая топология хаусдорфова.

Доказательство. (а) следует из неравенства $|l(x)|\leqslant\|l\|\|x\|$; (b) есть следствие принципа равномерной ограниченности; (c) вытекает из теоремы Хана—Банаха. Детали мы оставляем читателю. ∎

Подчеркнем, что (b) справедливо только для последовательностей. В задаче 39 от читателя требуется построить контрпример для соответствующего утверждения о направленностях.

Рассмотрим два примера; в каждом из них будет сказано, что это означает, что последовательность сходится. Это *не описывает* топологию полностью, но дает читателю возможность получить общее впечатление о соответствующей топологии.

Пример 1. Пусть $\mathscr{H}$—гильбертово пространство. Пусть $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in I}$—ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Для заданной *последовательности* $\psi_n\in\mathscr{H}$ пусть $\psi_n^{(\alpha)}=\langle\varphi_\alpha, \psi_n\rangle$— координаты ψ_n. Мы утверждаем, что $\psi_n\to\psi$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда (i) $\psi_n^{(\alpha)}\to\psi^{(\alpha)}$ при каждом α и (ii) $\{\|\psi_n\|\}$ ограничено. Действительно, пусть $\psi_n\xrightarrow{w}\psi$; тогда (i) следует из определения, а (ii) вытекает из свойства (b). С другой стороны, пусть выполняются (i) и (ii), и пусть $F\subset\mathscr{H}$—подпространство конечных линейных комбинаций элементов φ_α. В силу (i), $\langle\varphi, \psi_n\rangle\to$ $\to\langle\varphi, \psi\rangle$, если $\varphi\in F$. Пользуясь тем, что F плотно в $\mathscr{H}$, свойством (ii) и $\varepsilon/3$-приемом, можно доказать слабую сходимость.

Пример 2. Пусть X—компактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим слабую топологию на $C(X)$. Пусть $\{f_n\}$—последовательность в $C(X)$. Мы утверждаем, что $f_n\to f$ в слабой топологии тогда и только тогда, когда (i) $f_n(x)\to f(x)$ для любого $x\in X$ и (ii) $\|f_n\|$ ограничена. В самом деле, если $f_n\xrightarrow{w}f$, то (i) выполняется, так как $f\mapsto f(x)$ есть элемент $C(X)^*$, а (ii) следует из свойства (b). С другой стороны, если выполнены (i) и (ii), то $|f_n(x)|\leqslant\sup_n\|f_n\|_\infty$, где правая часть принадлежит L^1 при любой бэровой мере μ. Значит, по теореме о мажорированной сходимости для любой $\mu\in\mathscr{M}_+(X)$ интеграл $\int f_n\,d\mu\to$

$\longrightarrow \int f\,d\mu$. Поскольку любая $l \in \mathcal{M}(X)$ есть линейная комбинация мер из $\mathcal{M}_+$, заключаем, что $f_n \xrightarrow{w} f$.

Мы видели, что слабая топология слабее топологии нормы. Она действительно очень слабая! Чтобы понять это, заметим, что если у нас мало открытых множеств, то тем самым мало и замкнутых, а это означает, что замыкания очень велики. В задаче 40 читатель увидит, что в любом бесконечномерном банаховом пространстве X слабое замыкание единичной сферы $\{x \in X \mid \|x\| = 1\}$ в X есть единичный шар $\{x \in X \mid \|x\| \leqslant 1\}$.

Вскоре мы начнем изучать общие «сопряженные» топологии, а сейчас в качестве частного случая теоремы IV.20 приведем следующее утверждение:

Теорема IV.19. Линейный функционал l на банаховом пространстве слабо непрерывен тогда и только тогда, когда он непрерывен по норме.

Хотя эта теорема следует из теоремы IV.20, она имеет очень простое прямое доказательство (задача 42).

Наконец, мы хотим сказать несколько слов о $*$-слабой топологии и доказать одну часто применяемую теорему о компактности. Пусть $Y = X^*$ есть сопряженное какого-либо банахова пространства X. Тогда $Y^* = X^{**}$ индуцирует слабую топологию на Y, однако вместо нее можно рассмотреть топологию, порождаемую X на пространстве X^*.

Определение. Пусть X^*—сопряженное некоторого банахова пространства X. Тогда **$*$-слабая топология** есть слабейшая топология на X^*, в которой все функции $l \mapsto l(x)$, $x \in X$, непрерывны.

Заметим, что $*$-слабая топология еще слабее, чем слабая топология. Как и можно было ожидать, X рефлексивно тогда и только тогда, когда слабая и $*$-слабая топологии совпадают. Многие условия рефлексивности опираются на соотношения между слабой и $*$-слабой топологиями.

Чтобы избежать путаницы и иметь возможность сформулировать следующую теорему в естественной постановке, введем еще одно новое понятие.

Определение. Пусть X—векторное пространство, и пусть Y—семейство линейных функционалов на X, разделяющее точки X. Тогда **Y-слабая топология на X** (обозначается $\sigma(X, Y)$) есть слабейшая топология на X, в которой все функционалы из Y непрерывны.

Поскольку Y, по предположению, разделяет точки, $\sigma(X, Y)$ есть хаусдорфова топология на X. Например, слабая топология на X есть $\sigma(X, X^*)$, в то время как $\sigma(X^*, X)$ есть $*$-слабая топология на X^*.

Пример. $*$-слабую топологию на $\mathcal{M}(X)$, где X — компактное хаусдорфово пространство, часто называют **грубой** топологией. Чтобы представить себе, насколько она слаба, покажем, что линейные комбинации точечных масс $*$-слабо плотны в $\mathcal{M}(X)$. В задаче 41 от читателя требуется показать, что на самом деле они даже замкнуты по норме. Предположим, что μ — заданная мера. Следует показать, что каждая слабая окрестность μ содержит сумму точечных мер, или, иными словами, что если заданы $f_1, \ldots, f_n$ и ε, то можно найти такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ и $x_1, \ldots, x_m$, что

$$\left|\mu(f_i) - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_i(x_j)\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Действительно, тогда $\sum \alpha_j \delta_{x_j}$ попадает в грубую окрестность $N(f_1, \ldots, f_n, \varepsilon) + \mu$. Без ограничения общности можно предположить, что $f_1, \ldots, f_n$ линейно независимы. Для каждого x рассмотрим вектор $\mathfrak{f}_x = \langle f_1(x), \ldots, f_n(x)\rangle \in \mathbb{R}^n$. Если $\{\mathfrak{f}_x\}$ не порождают все $\mathbb{R}^n$, то в $\mathbb{R}^n$ существует $\mathfrak{a} = \langle a_1, \ldots, a_n\rangle \neq \mathbf{0}$, такой, что $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{f}_x = 0$ для всех x, т. е. $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = 0$, что противоречит линейной независимости. Значит, $\mathfrak{f}_x$ порождают все пространство $\mathbb{R}^n$. Тогда можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$ и $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, что

$$\langle \mu(f_1), \ldots, \mu(f_n)\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathfrak{f}_{x_i}.$$

Но при этом $\mu(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_i(x_j)$, что и доказывает утверждение.

Топология $\sigma(X^*, X)$, разумеется, слабее, чем топология нормы на X^*, так что все $\sigma(X^*, X)$-непрерывные линейные функционалы лежат в X^{**}. Однако, вообще говоря, не все функционалы из X^{**} $*$-слабо непрерывны на X^*; в самом деле, имеет место

Теорема IV.20. Непрерывные в топологии $\sigma(X, Y)$ линейные функционалы на X составляют в точности Y; в частности, единственные $*$-слабо непрерывные функционалы на X^* суть элементы X.

Доказательство. Предположим, что l есть $\sigma(X, Y)$-непрерывный функционал на X. Тогда $\{x \mid |l(x)| < 1\} \supset \{x \mid |y_i(x)| < \varepsilon;\ i = 1, \ldots, n\}$ для некоторого ε и некоторых $y_1, \ldots, y_n \in Y$. Допустим теперь, что $y_i(x)=0$ при $i=1, \ldots, n$. Тогда $|l(\varepsilon^{-1}x)|<1$ для всех $\varepsilon>0$, откуда следует, что $l(x)=0$. В результате l поднимается до функционала $\tilde{l}$ на X/K, где $K=\{x \mid y_i(x)=0,\ i=1, \ldots, n\}$. Элементарные абстрактно-алгебраические рассуждения показывают, что $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ порождают пространство, сопряженное к X/K. Значит, $\tilde{l}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{y}_i$, и, таким образом, $l=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in Y$. ∎

И наконец, в заключение этого раздела мы приведем самый важный в нем результат, который представляет собой, пожалуй, наиболее существенное следствие теоремы Тихонова.

Теорема IV.21 (теорема Банаха—Алаоглу). Пусть X^*—сопряженное некоторого банахова пространства X. Тогда единичный шар в X^* компактен в $*$-слабой топологии.

Доказательство. Пусть $B_x=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|x\|\}$ для всякого $x \in X$. Каждое B_x компактно, значит, по теореме Тихонова $B=\times_{x \in X} B_x$ компактно в топологии произведения. Но что такое B? Каждый элемент из B приписывает число $b(x) \in B_x$ всякому x из X, т. е. b есть функция из X в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $|b(x)| \leqslant \|x\|$. В частности, единичный шар $(X^*)_1$ есть подмножество в B, состоящее именно из тех $b \in B$, которые линейны. Что такое относительная топология, индуцированная в $(X^*)_1$ топологией произведения в B? Это в точности слабейшая топология, в которой $l \mapsto l(x)$ непрерывны при всяком x, т. е. $*$-слабая топология.

Итак, остается показать, что $(X^*)_1$ замкнут в топологии произведения. Предположим, что l_α—направленность в $(X^*)_1$, причем $l_\alpha \to l$. Так как $|l(x)| \leqslant \|x\|$, то достаточно показать, что l линеен. Но это просто; если $x, y \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то

$$l(\lambda x+\mu y)=\lim_\alpha l_\alpha(\lambda x+\mu y)=\lim_\alpha(\lambda l_\alpha(x)+\mu l_\alpha(y))=$$
$$=\lambda l(x)+\mu l(y). \ ∎$$

ДОПОЛНЕНИЕ К § IV.5. СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ

В § II.1 мы упоминали вкратце о векторнозначных измеримых функциях, принимающих значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Функция f была названа измеримой (см. задачу 12 гл. II), если $(y, f(\cdot))$—комплекснозначная