стим теперь, что $y_i(x)=0$ при $i=1, \ldots, n$. Тогда $|l(\varepsilon^{-1}x)|<1$ для всех $\varepsilon>0$, откуда следует, что $l(x)=0$. В результате l поднимается до функционала $\tilde{l}$ на X/K, где $K=\{x \mid y_i(x)=0,\ i=1, \ldots, n\}$. Элементарные абстрактно-алгебраические рассуждения показывают, что $\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n$ порождают пространство, сопряженное к X/K. Значит, $\tilde{l}=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \tilde{y}_i$, и, таким образом, $l=\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i \in Y$. ∎

И наконец, в заключение этого раздела мы приведем самый важный в нем результат, который представляет собой, пожалуй, наиболее существенное следствие теоремы Тихонова.

Теорема IV.21 (теорема Банаха—Алаоглу). Пусть X^*—сопряженное некоторого банахова пространства X. Тогда единичный шар в X^* компактен в $*$-слабой топологии.

Доказательство. Пусть $B_x=\{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| \leqslant \|x\|\}$ для всякого $x \in X$. Каждое B_x компактно, значит, по теореме Тихонова $B=\mathsf{X}_{x \in X} B_x$ компактно в топологии произведения. Но что такое B? Каждый элемент из B приписывает число $b(x) \in B_x$ всякому x из X, т. е. b есть функция из X в $\mathbb{C}$, удовлетворяющая условию $|b(x)| \leqslant \|x\|$. В частности, единичный шар $(X^*)_1$ есть подмножество в B, состоящее именно из тех $b \in B$, которые линейны. Что такое относительная топология, индуцированная в $(X^*)_1$ топологией произведения в B? Это в точности слабейшая топология, в которой $l \mapsto l(x)$ непрерывны при всяком x, т. е. $*$-слабая топология.

Итак, остается показать, что $(X^*)_1$ замкнут в топологии произведения. Предположим, что l_α—направленность в $(X^*)_1$, причем $l_\alpha \to l$. Так как $|l(x)| \leqslant \|x\|$, то достаточно показать, что l линеен. Но это просто; если $x, y \in X$ и $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, то

$$l(\lambda x+\mu y)=\lim_\alpha l_\alpha(\lambda x+\mu y)=\lim_\alpha (\lambda l_\alpha(x)+\mu l_\alpha(y))=$$
$$=\lambda l(x)+\mu l(y). \quad ∎$$

ДОПОЛНЕНИЕ К § IV.5. СЛАБАЯ И СИЛЬНАЯ ИЗМЕРИМОСТЬ

В § II.1 мы упоминали вкратце о векторнозначных измеримых функциях, принимающих значения в бесконечномерном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Функция f была названа измеримой (см. задачу 12 гл. II), если $(y, f(\cdot))$—комплекснозначная измеримая функция для любого $y \in \mathscr{H}$. Это свойство можно назвать **слабой измеримостью**. Другое естественное определение измеримости, а priori более сильное,— это требование, чтобы $f^{-1}[C]$ было измеримо при любом открытом множестве $C \subset \mathscr{H}$. *Всюду в этой книге, говоря о векторнозначной измеримой функции, мы будем иметь в виду функцию, измеримую в слабом смысле.* Однако, чтобы удовлетворить естественное любопытство читателя, мы здесь кратко остановимся на сравнении различных понятий измеримости векторнозначных функций.

Определение. Пусть f—функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu, \mathscr{R} \rangle$, принимающая значения в банаховом пространстве E.

(i) f называется **сильно измеримой**, если существует последовательность функций f_n, такая, что $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ по норме при почти всех $x \in M$, и всякая f_n принимает только конечное число значений, причем каждое значение принимается на некотором множестве из $\mathscr{R}$.

(ii) f называется **измеримой по Борелю**, если $f^{-1}[C] \in \mathscr{R}$ для любого открытого C в E (в топологии метрического пространства на E).

(iii) f называется **слабо измеримой**, если $l(f(x))$ есть комплексно-значная измеримая функция при любом $l \in E^*$.

Предложение. (a) Поточечный предел последовательности функций, измеримых по Борелю, есть функция, измеримая по Борелю.

(b) Пусть f—функция из M в E. Если f сильно измерима, то она измерима по Борелю.

(c) Пусть f—функция из M в E. Если f измерима по Борелю, то она слабо измерима.

Доказательство. (a) Пусть $f_n \longrightarrow f$ поточечно по норме. Пусть C— открытое множество в E. Тогда $f(x) \in C$ в том и только в том случае, когда существует такое n, что $f_m(x) \in C$, коль скоро $m > n$. Значит,

$$f^{-1}[C] = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m>n} f_m^{-1}[C],$$

и потому f измеримо по Борелю.

(b) прямо следует из (a) и определений.

(c) Композиция борелевых функций сама борелева. ∎

Теорема IV.22. Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Пусть f—функция из пространства с мерой $\langle M, \mu, \mathscr{R} \rangle$ в $\mathscr{H}$. Тогда следующие три свойства эквивалентны:

(a) f сильно измерима;

(b) f измерима по Борелю;

(c) f слабо измерима.

Доказательство. Вследствие последнего предложения нужно только показать, что (a) следует из (c). Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Пусть $a_n = (\psi_n, f(x))$. Каждое a_n есть комплекснозначная измеримая функция. Легко построить конечнозначные $a_{n,m}(x)$, такие, что $|a_{n,m}(x)| < |a_n(x)|$ при всех x и $\lim_{m\to\infty} a_{n,m}(x) = a_n(x)$ при всех $x \in X$. Положим $f_N = \sum_{n=1}^{N} a_{n,N}(x)\psi_n$. Тогда f_N конечнозначна и $f_N \to f$ по норме, так что f сильно измерима. ∎

Пример. Пусть $\mathbf{C}_t$ — экземпляр множества комплексных чисел $\mathbf{C}$, и пусть $\mathcal{H} = \bigoplus_{t\in\mathbf{R}} \mathbf{C}_t$, т. е. $\mathcal{H}$ состоит из функций φ на $\mathbf{R}$, отличных от нуля лишь в счетном числе точек t и таких, что $\sum_{t\in\mathbf{R}} |\varphi(t)|^2 < \infty$. Пусть φ_s задано формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = s, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbf{R}}$ — ортонормированный базис в $\mathcal{H}$. Пусть $f\colon \mathbf{R} \to \mathcal{H}$ определено равенством $f(s) = \varphi_s$. Для всякой $\psi \in \mathcal{H}$ имеем $(\psi, f(s)) = 0$, за исключением счетного множества, так что $(\psi, f(s))$ измерима. Значит, $f(s)$ слабо измерима. Но f не является сильно измеримой. В самом деле, если $f = \lim f_n$ поточечно по норме, то $\operatorname{Ran} f \in \overline{\bigcup \operatorname{Ran} f_n}$. Но если бы каждая f_n была конечнозначной, то $\operatorname{Ran} f$ должно было бы быть сепарабельным, а это не так.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ IV.1. Читателю, который захочет глубже проникнуть в область общей теоретико-множественной топологии, мы очень рекомендуем книгу: Дж. Келли, Общая топология, «Наука», М., 1968. Лучше всего читать эту книгу, решая все задачи; конечно, это отнимает много времени, но если читатель может это время потратить, его усилия будут вознаграждены. Из других курсов, описывающих как элементарные, так и более сложные топологические понятия, назовем следующие: К. Куратовский, Топология, т. 1, «Мир», М., 1966; W. Pervin, Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964; W. Thron, Topological Structures, Holt, New York, 1966.

Само понятие топологических пространств выросло из работ Фреше и Хаусдорфа. Классификация пространств по типам T_1—T_4 восходит к Александрову и Хопфу: P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Berlin, 1935.

Понятие последовательности Коши нельзя распространить на произвольные топологические пространства. Однако можно добавить к топологической структуре еще некую «равномерную структуру» и получить тогда пространства, в которых последовательность Коши и полнота имеют смысл. Обычно подразумевается, что окрестности x описывают близость к x. Чтобы иметь понятие «близости к x», равномерное по x, требуется семейство $\mathcal{U}$ подмножеств $X \times X$, каждое из которых содержит множество $\Delta = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$. Следует