Доказательство. Вследствие последнего предложения нужно только показать, что (a) следует из (c). Пусть $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Пусть $a_n = (\psi_n, f(x))$. Каждое a_n есть комплекснозначная измеримая функция. Легко построить конечнозначные $a_{n,m}(x)$, такие, что $|a_{n,m}(x)| < |a_n(x)|$ при всех x и $\lim\limits_{m\to\infty} a_{n,m}(x) = a_n(x)$ при всех $x \in X$. Положим $f_N = \sum\limits_{n=1}^{N} a_{n,N}(x)\psi_n$. Тогда f_N конечнозначна и $f_N \to f$ по норме, так что f сильно измерима. ∎

Пример. Пусть $\mathbb{C}_t$ — экземпляр множества комплексных чисел $\mathbb{C}$, и пусть $\mathscr{H} = \bigoplus\limits_{t\in\mathbb{R}} \mathbb{C}_t$, т. е. $\mathscr{H}$ состоит из функций φ на $\mathbb{R}$, отличных от нуля лишь в счетном числе точек t и таких, что $\sum\limits_{t\in\mathbb{R}} |\varphi(t)|^2 < \infty$. Пусть φ_s задано формулой

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = s, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Тогда $\{\varphi_s\}_{s\in\mathbb{R}}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Пусть $f\colon \mathbb{R} \to \mathscr{H}$ определено равенством $f(s) = \varphi_s$. Для всякой $\psi \in \mathscr{H}$ имеем $(\psi, f(s)) = 0$, за исключением счетного множества, так что $(\psi, f(s))$ измерима. Значит, $f(s)$ слабо измерима. Но f не является сильно измеримой. В самом деле, если $f = \lim f_n$ поточечно по норме, то $\operatorname{Ran} f \in \overline{\bigcup \operatorname{Ran} f_n}$. Но если бы каждая f_n была конечнозначной, то $\operatorname{Ran} f$ должно было бы быть сепарабельным, а это не так.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ IV.1. Читателю, который захочет глубже проникнуть в область общей теоретико-множественной топологии, мы очень рекомендуем книгу: Дж. Келли, Общая топология, «Наука», М., 1968. Лучше всего читать эту книгу, решая все задачи; конечно, это отнимает много времени, но если читатель может это время потратить, его усилия будут вознаграждены. Из других курсов, описывающих как элементарные, так и более сложные топологические понятия, назовем следующие: К. Куратовский, Топология, т. 1, «Мир», М., 1966; W. Pervin, Foundations of General Topology, Academic Press, New York, 1964; W. Thron, Topological Structures, Holt, New York, 1966.

Само понятие топологических пространств выросло из работ Фреше и Хаусдорфа. Классификация пространств по типам T_1—T_4 восходит к Александрову и Хопфу: P. Alexandroff, H. Hopf, Topologie I, Berlin, 1935.

Понятие последовательности Коши нельзя распространить на произвольные топологические пространства. Однако можно добавить к топологической структуре еще некую «равномерную структуру» и получить тогда пространства, в которых последовательность Коши и полнота имеют смысл. Обычно подразумевается, что окрестности x описывают близость к x. Чтобы иметь понятие «близости к x», равномерное по x, требуется семейство $\mathscr{U}$ подмножеств $X \times X$, каждое из которых содержит множество $\Delta = \{\langle x, x\rangle \mid x \in X\}$. Следует еще наложить на $\mathcal{U}$ условия, которые обеспечат, чтобы $\mathcal{U}_x = \{U_x \mid U \in \mathcal{U}\}$, где $U_x = \{y \mid \langle x, y \rangle \in U\}$, была системой окрестностей для некоторой топологии. Канонический пример состоит в том, чтобы выбрать в качестве $\mathcal{U}$ семейство всех множеств в $X \times X$, содержащих множество вида $\{\langle x, y \rangle \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$, где ρ—некоторая метрика. Если G есть топологическая группа (в частности, если G—топологическое векторное пространство), то существует также естественная однородная структура, задаваемая семейством $\mathcal{U} = \{U_N \mid N \in \eta\}$, где η—семейство окрестностей единичного элемента, а $U_N = \{\langle x, y \rangle \mid xy^{-1} \in N\}$. Пусть задана равномерная структура $\mathcal{U}$; направленность $\{x_\alpha \mid \alpha \in D\}$ называется направленностью Коши, если для каждого $U \in \mathcal{U}$ существует такое $\alpha_0 \in D$, что из $\alpha, \beta > \alpha_0$ следует $\langle x_\alpha, x_\beta \rangle \in U$.

Понятие равномерного пространства было впервые формализовано А. Вейлем: A. Weil, Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale, Actualités Sci. Ind., 551, Paris, 1937. Современное изложение теории равномерных пространств см. у Келли, гл. 6, или у Шоке (G. Choquet, Lectures on Analysis, Benjamin, New York, 1969, § 5).

§ *IV.2*. Направленности были впервые введены в статье: E. H. Moore and H. L. Smith, A General Theory of Limits, *Amer. J. Math.*, 44 (1922), 102. В более старых работах иногда говорится о сходимости Мура—Смита. Более подробно об этом см. у Келли, гл. 2.

Существует другой подход к вопросу о сходимости в топологических пространствах, пропагандируемый Н. Бурбаки. Это так называемая *теория фильтров*; она рассматривается у Шоке, § 4, а также у Бурбаки, Общая топология, гл. I. Теория сходимости, построенная на понятии фильтров, кажется нам совершенно не отвечающей интуитивным представлениям, и мы предпочитаем во всех случаях пользоваться направленностями.

§ *IV.3*. Первым, кто осознал важность топологии произведения (и доказал свою известную теорему), был А. Н. Тихонов; см. две его фундаментальные статьи: Über die topologische Erweiterung von Raumen, *Math. Ann.*, 102 (1929), 544—556, и Über einen Funktionenraum, *Math. Ann.*, 111 (1935), 762—766. Обычное доказательство теоремы Тихонова (см., например, Келли) использует свойство центрированности и довольно сложно. Проще выглядит доказательство, опирающееся на теорию фильтров и ультрафильтров, которая как будто специально создана для этого доказательства (см. Шоке). Но это доказательство можно перевести на язык направленностей. Ниже мы приводим набросок такого доказательства. (1) Направленность $\{x_\alpha\}$ в пространстве X называется *универсальной*, если для любого $A \subset X$ в конце концов $x_\alpha \in A$ или $x_\alpha \in X \setminus A$. Заметим, что A произвольно и в определении универсальной направленности ничего не говорится о топологии. (2) Если x—точка накопления универсальной направленности, то $x_\alpha \to x$, ибо если часто $x_\alpha \in A$, то обязательно в конце концов $x_\alpha \in A$. (3) Любая направленность имеет универсальную поднаправленность. В техническом отношении это центральный пункт доказательства. В нем используется аксиома выбора. (4) X компактно тогда и только тогда, когда каждая универсальная направленность сходится. Когда (3) предполагается выполненным, это в точности теорема Больцано — Вейерштрасса. (5) Для доказательства теоремы Тихонова допустим, что $\{x_\alpha\}_{\alpha \in D}$—универсальная направленность в $\mathop{\times}\limits_{i \in I} A_i$, где каждое A_i компактно. Напишем $x_\alpha = \{x_\alpha^{(i)}\}_{i \in I}$, причем $x_\alpha^{(i)} \in A_i$. Поскольку $\{x_\alpha\}$ универсальна, $\{x_\alpha^{(i)}\}_{i \in I}$ тоже универсальна при всяком i. Так как A_i компактно, то $x_\alpha^{(i)} \to x^{(i)}$ при некотором $x^{(i)} \in A_i$. Пусть x—элемент $\{x^{(i)}\}_{i \in I}$ в $\mathop{\times}\limits_{i \in I} A_i$. Тогда $x_\alpha \to x$, так что каждая универсальная направленность сходится. Мы впервые узнали это доказательство из лекций Ланфорда: O. E. Lanford, III, Les Houches lectures, 1970.

В каких случаях топология в топологическом пространстве задается метрикой? В общем случае на этот вопрос не существует простого ответа, однако для компактных хаусдорфовых пространств известно, что X метризуемо (имеет топологию, задаваемую метрикой) тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет первой аксиоме счетности. В § V.2 мы увидим, что подобный результат имеет место и для топологических векторных пространств. Факты, относящиеся и к компактным, и к векторным пространствам, наиболее понятны в общем контексте равномерных пространств; см. Келли, гл. 6.

Данное Вейерштрассом доказательство его теоремы о приближении полиномами находится на стр. 5 третьего тома его трудов: K. Weierstrass, Mathematische Werke, Mayer und Müller, Berlin, 1903. Обобщение Стоуна впервые появилось в работе: M. H. Stone, Applications of the Theory of Boolean Rings to General Topology, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 41 (1937), 325—481; он же дал упрощенное доказательство в своей классической статье: The Generalized Weierstrass Approximation Theorem, *Math. Mag.*, 21 (1947/48), 167—184, 237—254.

§ *IV.4.* В качестве краткого и простого изложения теории меры на компактных пространствах мы очень рекомендуем первую главу книги: L. Nachbin, The Haar Integral, Van Nostrand—Reinhold, Princeton, N. J., 1965. Более полное изложение можно найти у Бурбаки, Интегрирование, гл. I—IV.

Большая часть того, что мы говорили о положительных линейных функционалах, относится и к векторным пространствам, на которых задано упорядочение, допускающее взятие конечных нижних и верхних граней, т. е. к векторным решеткам. Глубокая связь между понятиями порядка и топологией рассмотрена в книге: L. Nachbin, Topology and Order, Van Nostrand — Reinhold, Princeton, N. J., 1965.

Дополнительно о теории меры на локально компактных пространствах см. в указанных книгах Нахбина и Бурбаки или (ближе к принятому здесь подходу) в книге Шоке (см. замечания к § IV.1).

§ *IV.5.* Далее мы докажем более сильный результат, чем наше утверждение, что линейные комбинации мер Дирака грубо плотны в $\mathcal{M}(X)$. На самом деле мы покажем, что линейные комбинации в $\mathcal{M}_{+,1}(X)$ грубо плотны в $\mathcal{M}_{+,1}(X)$. Поэтому любая положительная мера μ, $\mu(X)=1$, может быть грубо приближена мерами $\sum_{n=1}^{N} t_n\delta_{x_n}$, где $0\leqslant t_n\leqslant 1$, $\sum t_n=1$. Это будет следовать из теоремы Крейна—Мильмана, которая приводится в § XVI.1. Теорема Банаха—Алаоглу была доказана в работе: L. Alaoglu, Weak Topologies of Normed Linear Spaces, *Ann. Math.*, 41 (1940), 252—267.

Теорему IV.22 можно распространить на произвольное сепарабельное банахово пространство. В более общем случае имеет место теорема Петтиса: векторнозначная функция сильно измерима тогда и только тогда, когда она слабо измерима и почти сепарабельнозначна (в том смысле, что после изменения f на множестве меры нуль $\operatorname{Ran} f$ станет сепарабельным). Эта теорема впервые доказана в работе: B. J. Pettis, On Integration in Vector Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 44 (1938), 277—304.

Интеграл от сильно измеримой функции можно определить при помощи методов, вполне аналогичных тем, которые употребляются для вещественнозначных функций. Этот *интеграл Бохнера* обсуждается в книге: К. Иосида, Функциональный анализ, «Мир», М., 1970, и во многих других учебниках. Он был введен Бохнером в работе: S. Bochner, Integration von Funktionen, deren Wert die Elemente eines Vektorraumes sind, *Fund. Math.*, 20 (1933), 262—276. Интеграл Бохнера удовлетворяет теореме о мажорированной сходимости с оценкой по норме. Всюду в этой книге мы пользуемся слабым интегралом, определяемым как $l\left(\int f(x)\,d\mu\right)=\int l(f(x))\,d\mu$. Интеграл Бохнера обладает лучшими свойствами, чем этот слабый интеграл, но нам эти дополнительные свойства не потребуются, так что мы удовлетворимся более простым слабым интегралом.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что семейство всех топологий на некотором пространстве образует полную решетку, т. е. что любое семейство топологий обладает наименьшей верхней гранью и наибольшей нижней гранью.

2 (аксиомы замыкания Куратовского). Покажите, что операция $A \mapsto \overline{A}$ в топологическом пространстве обладает следующими свойствами:

(i) $\overline{(\overline{A})} = \overline{A}$;
(ii) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$;
(iii) $A \subset \overline{A}$;
(iv) $\overline{\varnothing} = \varnothing$.

Напротив, допустим, что задана операция $^-$: $2^X \longrightarrow 2^X$ ($2^X \equiv$ все подмножества множества X), удовлетворяющая условиям (i)—(iv). Покажите, что семейство множеств B, таких, что $\overline{X \setminus B} = X \setminus B$, образует топологию, для которой $^-$ есть операция замыкания.
Литература: Келли, стр. 67—69.

3. (a) Пусть 2—топологическое пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией. Докажите, что топологическое пространство X связно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция f: $X \longrightarrow 2$ постоянна.
(b) Докажите, что любое произведение связных пространств связно.
(c) Пусть S—топологическое пространство. Допустим, что $A, B \subset S$ связны в относительной топологии и $A \cap B \neq \varnothing$; $A \cup B = S$. Покажите, что S связно.
(d) Пусть S—топологическое пространство. Предположим, что $S = \overline{D}$ и D связно. Докажите, что S связно.
(e) Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.
(f) Докажите теорему о промежуточном значении из элементарного анализа: если f—непрерывная функция на $[a, b]$, то для любого $f(a) < x < f(b)$ существует такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = x$.
Указание. Воспользуйтесь (a) для доказательства (b)—(e).

4. (a) Топологическое пространство X называется **пространством Линделёфа**, если любое его открытое покрытие имеет счетное подпокрытие. Докажите, что любое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, есть пространство Линделёфа.
(b) Докажите, что любое регулярное (т. е. T_3-) пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально (т. е. T_4).
Литература: Келли, стр. 76, 77.

5. (a) Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны при любом $n > 1$.
(b) Докажите, что $\mathbb{R} \neq X \times X$ ни для какого топологического пространства X.
Указание. Что случится с $\mathbb{R}$, если изъять из него одну точку?

6. Топологическое пространство X называется **линейно связным**, если при заданных $x, y \in X$ существует непрерывная функция (дуга) $f: [0, 1] \longrightarrow X$, такая, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.
(a) Покажите, что если X линейно связно, то оно связно.