нера обладает лучшими свойствами, чем этот слабый интеграл, но нам эти дополнительные свойства не потребуются, так что мы удовлетворимся более простым слабым интегралом.

ЗАДАЧИ

1. Докажите, что семейство всех топологий на некотором пространстве образует полную решетку, т. е. что любое семейство топологий обладает наименьшей верхней гранью и наибольшей нижней гранью.

2 (аксиомы замыкания Куратовского). Покажите, что операция $A \mapsto \bar{A}$ в топологическом пространстве обладает следующими свойствами:

(i) $\overline{(\bar{A})} = \bar{A}$;
(ii) $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$;
(iii) $A \subset \bar{A}$;
(iv) $\bar{\varnothing} = \varnothing$.

Напротив, допустим, что задана операция $^-$: $2^X \longrightarrow 2^X$ ($2^X \equiv$ все подмножества множества X), удовлетворяющая условиям (i)—(iv). Покажите, что семейство множеств B, таких, что $\overline{X \setminus B} = X \setminus B$, образует топологию, для которой $^-$ есть операция замыкания.
Литература: Келли, стр. 67—69.

3. (a) Пусть 2—топологическое пространство $\{0, 1\}$ с дискретной топологией. Докажите, что топологическое пространство X связно тогда и только тогда, когда любая непрерывная функция f: $X \longrightarrow 2$ постоянна.
(b) Докажите, что любое произведение связных пространств связно.
(c) Пусть S—топологическое пространство. Допустим, что $A, B \subset S$ связны в относительной топологии и $A \cap B \neq \varnothing$; $A \cup B = S$. Покажите, что S связно.
(d) Пусть S—топологическое пространство. Предположим, что $S = \bar{D}$ и D связно. Докажите, что S связно.
(e) Докажите, что образ связного пространства при непрерывном отображении связен.
(f) Докажите теорему о промежуточном значении из элементарного анализа: если f—непрерывная функция на $[a, b]$, то для любого $f(a) < x < f(b)$ существует такое $c \in [a, b]$, что $f(c) = x$.
Указание. Воспользуйтесь (a) для доказательства (b)—(e).

4. (a) Топологическое пространство X называется **пространством Линделёфа**, если любое его открытое покрытие имеет счетное подпокрытие. Докажите, что любое пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, есть пространство Линделёфа.
(b) Докажите, что любое регулярное (т. е. T_3-) пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально (т. е. T_4).
Литература: Келли, стр. 76, 77.

5. (a) Докажите, что $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}^n$ не гомеоморфны при любом $n > 1$.
(b) Докажите, что $\mathbb{R} \neq X \times X$ ни для какого топологического пространства X.
Указание. Что случится с $\mathbb{R}$, если изъять из него одну точку?

6. Топологическое пространство X называется **линейно связным**, если при заданных x, $y \in X$ существует непрерывная функция (дуга) f:$[0, 1] \longrightarrow X$, такая, что $f(0) = x$, $f(1) = y$.
(a) Покажите, что если X линейно связно, то оно связно.

(b) Пусть X_0 — график функции $y=\sin 1/x$ на пространстве $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, снабженном относительной топологией как подмножество плоскости. Пусть $X = X_0 \cup \{\langle x, y\rangle \mid x=0\}$. Покажите, что X связно, но не линейно связно.

7. Пусть на $X=\mathbb{R}$ задана топология $\mathcal{T}$, порождаемая всеми множествами вида $\{[a, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\}$, образующими на самом деле базу для $\mathcal{T}$. Докажите, что:
(a) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ сепарабельно;
(b) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ удовлетворяет первой аксиоме счетности;
(c) $\langle X, \mathcal{T}\rangle$ *не удовлетворяет* второй аксиоме счетности.

8. Докажите, что любое подпространство сепарабельного метрического пространства сепарабельно.

9. Пусть Y есть $\mathbb{R}^2$ с топологией произведения, задаваемой топологией $\mathcal{T}$ задачи 7 на каждом множителе. Докажите, что:
(a) Y сепарабельно;
(b) прямая $x+y=1$ не сепарабельна в относительной топологии.

10. Пусть X — любое несчетное множество, и пусть $\mathcal{T}$ — топология, состоящая из $\varnothing$ и дополнений конечных множеств. Докажите, что:
(a) X сепарабельно;
(b) X счетно;
(c) X есть T_1-пространство и *не есть* T_2;
(d) X не удовлетворяет ни первой, ни второй аксиомам счетности.

†*11.* Докажите теорему IV.2.

12. Пусть X — банахово пространство l_∞; рассмотрим последовательность $\delta_1, \delta_2, \ldots$ в X^*, заданную равенством

$$\delta_n(\{c_k\}_{k=1}^{\infty}) = c_n.$$

Докажите, что $\{\delta_n\}, \ldots$ не имеет $*$-слабо сходящихся подпоследовательностей, но имеет $*$-слабо сходящуюся поднаправленность.

13. Приведите пример, показывающий, что поточечный предел *направленности* борелевых функций на $\mathbb{R}$ может не быть борелевой функцией.

14. Покажите, что пространство примера в § IV.2 не компактно, но линделёфово (см. задачу 4).

15. Пусть $\mathcal{A}$ — семейство непрерывных функций на $[0, 2\pi]$ со свойством $\int_0^{2\pi} e^{ikx} f(x)\,dx = 0$, если k — отрицательное целое. Докажите, что $\mathcal{A}$ — замкнутая разделяющая точки алгебра, $1 \in \mathcal{A}$, однако $\mathcal{A} \neq C[0, 2\pi]$.

†*16.* Докажите заключительное утверждение теоремы Стоуна — Вейерштрасса для случая, когда не предполагается, что $1 \in B$.

**17.* Пусть $\mathcal{B}$ — замкнутый идеал в $C_{\mathbb{R}}(X)$. Пусть, далее, $Y=\{x \in X \mid f(x)=0$ при всех $f \in \mathcal{B}\}$. Докажите, что Y замкнуто и что $\mathcal{B}=\{f \in C_{\mathbb{R}}(X) \mid f=0$ на $Y\}$.

18. Докажите теорему Титце для случая, когда предполагается только, что X нормально. (См. указания, которые дает Келли, гл. 7, задача О.)

19. Пусть f — непрерывная функция на $[-1/2, 1/2]$, причем $f(1/2)=f(-1/2)=0$. Пусть $s_k(X)$ — последовательность функций, таких, что $\int_{-1}^{1} s_k(x)\,dx = 1$ и каждая $s_k \geqslant 0$, так что при любом $\delta > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{1\geqslant |x|\geqslant\delta} s_k(x) = 0.$$

Докажите, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{-1/2}^{1/2} s_k(x-y) f(y)\,dy = f(x)$$

для любого $x \in [-1/2, 1/2]$ и что сходимость равномерная.

20. Пусть $s_k(x) = (I_k)^{-1}(1-x^2)^k$, где $I_k = \int\limits_{-1}^{1} (1-x^2)^k\,dx$. Пользуясь результатами задачи 19, докажите, что любая непрерывная функция на $[-1/4, 1/4]$ есть равномерный предел полиномов на $[-1/4, 1/4]$.

21. Пользуясь теоремой Стоуна — Вейерштрасса, докажите, что:

(a) $\{e^{ikx}\}_{k=-\infty}^{\infty}$ образуют полную *ортогональную* систему в $L^2[0, 2\pi]$;

(b) полиномы Лежандра образуют полную *ортогональную* систему в $L^2[-1, 1]$;

*(c) сферические гармоники образуют полную ортонормированную систему в пространстве L^2 на сфере.

(*Указание*: воспользуйтесь тем, что вам известно о коэффициентах Клебша — Гордона!)

22. Докажите следующую *теорему Дини*. Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Пусть f_n — монотонно убывающее семейство функций и $f_n(x) \to f(x)$ поточечно. Тогда f_n сходится равномерно в том и только том случае, когда f непрерывна.

23. Пусть X — локально компактное хаусдорфово пространство. Рассмотрим $\hat{X} = X \cup \{\infty\}$, где ∞ — это «точка», не принадлежащая X. Назовем $O \subset \hat{X}$ открытым, если либо $\infty \notin O$ и O открыто в X, либо $\infty \in O$ и $\hat{X} \setminus O$ компактно. Докажите, что $\hat{X}$ — компактное хаусдорфово пространство. Оно называется **одноточечной компактификацией** пространства X.

24. Докажите теорему Стоуна — Вейерштрасса для локально компактного пространства X: если $\mathcal{A}$ есть замкнутая подалгебра из $C_\infty(X)$ — пространства непрерывных вещественнозначных функций, исчезающих на ∞, и если $\mathcal{A}$ разделяет точки и для всякого $x \in X$ существует такая $f \in \mathcal{A}$, что $f(x) \neq 0$, то $\mathcal{A} = C_\infty(X)$.

25. Пусть X — *локально компактное хаусдорфово пространство. Докажите*, что для C, $D \subset X$, где D — замкнуто, а C компактно, существует такая непрерывная функция f, $0 \leqslant f \leqslant 1$, на X, что $f[C] = 0$, $f[D] = 1$.

Замечание. Для решения задач 24 и 25 воспользуйтесь пространством $\hat{X}$ задачи 23.

26. (a) Докажите, что любое локально компактное хаусдорфово пространство есть T_3-пространство.

(b) Докажите, что любое локально компактное хаусдорфово пространство, удовлетворяющее второй аксиоме счетности, нормально.

(c) Докажите, что любое σ-компактное локально компактное хаусдорфово пространство нормально.

Замечание. Существуют локально компактные пространства, которые хаусдорфовы, но не нормальны. См. Келли, гл. 4, задача E.

27. Группа G, наделенная топологией, называется топологической группой, если $\langle x, y\rangle \mapsto xy^{-1}$ — отображение $G \times G \longrightarrow G$ — непрерывно. Функция f на топологической группе G называется равномерно непрерывной, если для любого ε можно найти такую окрестность N_ε единицы $e \in G$, что $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$, когда $xy^{-1} \in N_\varepsilon$. Докажите, что любая непрерывная функция на компактной топологической группе равномерно непрерывна.

*28. (a) Пусть A — алгебра вещественнозначных ограниченных непрерывных функций на $\mathbb{R}$, разделяющая точки и замкнутая по норме $\|\cdot\|_\infty$. Образуем $X_A = \mathop{\times}\limits_{f \in A} \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \leqslant \|f\|\}_\infty$ с топологией произведения. Отобразим $\mathbb{R} \longrightarrow X_A$ так, что точка x переходит в точку с координатами $\{f(x)\}_{f \in A}$. Докажите, что образ $\mathbb{R}$ в X_A гомеоморфен $\mathbb{R}$ и что его замыкание компактно.

(b) Топологическое пространство X с отображением $f: \mathbb{R} \longrightarrow X$ называется **компактификацией** $\mathbb{R}$, если f есть гомеоморфизм между $\mathbb{R}$ и его образом, если этот образ плотен в X и если X — компактное хаусдорфово пространство. Две компактификации $f: \mathbb{R} \longrightarrow X$ и $g: \mathbb{R} \longrightarrow Y$ отождествляются, если существует такой гомеоморфизм $h: X \longrightarrow Y$, что $h \circ f = g$. Докажите, что существует взаимно однозначное соответствие между компактификациями $\mathbb{R}$ и алгебрами $A \subset C_{\mathbb{R}}$, удовлетворяющими условиям пункта (a).

(c) Если выбрать $A = C(\mathbb{R})$, то та компактификация, которая получается с помощью конструкции пункта (a), называется **компактификацией Стоуна — Чеха** и обозначается $\check{\mathbb{R}}$. Докажите, что $\check{\mathbb{R}}$ есть универсальная компактификация $\mathbb{R}$ в следующем смысле: если даны любая компактификация $f: \mathbb{R} \longrightarrow X$ и компактификация Стоуна — Чеха $g: \mathbb{R} \longrightarrow \check{\mathbb{R}}$, то можно найти непрерывное и сюръективное отображение $h: \check{\mathbb{R}} \longrightarrow X$, такое, что $h \circ g = f$.

29. Пусть $\langle X, d\rangle$ — метрическое пространство без изолированных точек. Предположим, что всякая непрерывная функция на X равномерно непрерывна. Покажите, что X компактно.

30. (a) Докажите, что всякое метрическое пространство нормально.
(b) Докажите, что всякое замкнутое множество в метрическом пространстве есть G_δ-множество.

†31. Докажите утверждение о единственности теоремы IV.16.

32. Пусть $\{a_n\}$ — последовательность чисел с таким свойством: если $\sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n x^n \geqslant 0$ при всех $x \in [0, 1]$, то $\sum\limits_{n=0}^{N} \alpha_n a_n \geqslant 0$. Докажите, что существует единственная (положительная) мера μ на $[0, 1]$, такая, что $a_n = \int\limits_0^1 x^n \, d\mu$.

33. Пусть X — векторное пространство, а Y — семейство функционалов на нем, разделяющих точки. Докажите, что если топология $\sigma(X, Y)$ порождается метрикой, то Y имеет счетную *алгебраическую* размерность. **Алгебраический базис** в Y есть подмножество, *конечные* линейные комбинации которого порождают Y. Алгебраическая размерность — это число элементов минимального алгебраического базиса.

34. Пусть X — вещественное банахово пространство и C — единичный шар в X^* со $*$-слабой топологией. Докажите, что любая непрерывная функция

на C может быть равномерно приближена полиномами от элементов X, действующими как линейные функционалы на X^*.

35. Пусть X — банахово пространство и X^* — его сопряженное. Пусть L_n, $n \geqslant 1$, — элементы X^* и $L_n \longrightarrow L \in X^*$ в $*$-слабом смысле. Пусть $x_n \longrightarrow x$ по норме. Всегда ли $L_n(x_n) \longrightarrow L(x)$?

36. Докажите, что X плотно в X^{**} в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$.

37. Пусть $T\colon C(X) \longrightarrow C(Y)$ линейно. Говорят, что T сохраняет положительность (или положительно), если $Tf \geqslant 0$, коль скоро $f \geqslant 0$. Если T положительно, мы пишем $T \geqslant 0$. Если $S - T \geqslant 0$, то мы пишем $T \leqslant S$.
(a) Докажите, что любое $T \geqslant 0$ автоматически непрерывно и что $\|T\| = \|T1\|_\infty$.
(b) Пусть S_n — возрастающее семейство отображений. Докажите, что S_n сходится по операторной норме тогда и только тогда, когда $S_n 1$ сходится по функциональной норме.

†*38.* Докажите первое предложение § IV. 2.

†*39.* Найдите банахово пространство и слабо сходящуюся направленность, которая не ограничена по норме.

†*40.* Пусть X — бесконечномерное банахово пространство со слабой топологией. Докажите, что замыкание единичной сферы есть единичный шар.

†*41.* Пусть X — компактное хаусдорфово пространство. Докажите, что множество сходящихся бесконечных линейных комбинаций точечных мер замкнуто по норме в $\mathcal{M}(X)$.

†*42.* Дайте прямое доказательство теоремы IV.19.

**43.* (a) Пусть X — компактное множество со счетной базой. Пусть μ — бэрова мера на X. Докажите, что $L^p(X, d\mu)$ сепарабельно при всех $p < \infty$. (*Указание.* Пусть A_n — счетная база топологии X. Для всех n, m, таких, что $\bar{A}_n \cap \bar{A}_m = \varnothing$, найдите такие $f_{n,m} \in C(X)$, что $f = 0$ на A_n и $f = 1$ на A_m. Воспользуйтесь этими $f_{n,m}$ для построения счетного плотного множества в $C(X)$. Далее используйте то, что $C(X)$ плотно в $L^p(X, d\mu)$.)
(b) Распространите результат пункта (a) на тот случай, когда X лишь локально компактно. (*Указание:* докажите, что X σ-компактно.)

**44.* Решите любые пятьдесят задач из книги Келли.