V. ЛОКАЛЬНО ВЫПУКЛЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Математики, как французы: все что вы им говорите, они переводят на свой язык, и это тотчас же становится чем-то совершенно иным.

И. В. ГЁТЕ

V.1. Общие свойства

При изучении слабых топологий в § IV.5 мы уже обсудили несколько топологий, не порождаемых нормой. Мы также упомянули, что бэровы меры на локально компактном топологическом пространстве X образуют пространство, сопряженное множеству $\varkappa(X)$ непрерывных функций с компактным носителем, если наделить последнее подходящей ненормируемой топологией. Цель этой главы — обсуждение общего класса топологических векторных пространств, в котором содержатся пространства этих примеров, а также пространства обобщенных функций, встречающихся в самых разнообразных задачах функционального анализа и во многих физических приложениях.

Идея, лежащая в основе обсуждаемых топологий, очень проста. Предположим, что вместо одной нормы у нас есть семейство норм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где A — некоторое множество индексов. Мы хотели бы иметь топологию, в которой направленность $\{x_\beta\}$ сходилась бы к x тогда и только тогда, когда $\rho_\alpha(x_\beta - x) \longrightarrow 0$ при каждом фиксированном $\alpha \in A$. Однако хорошо было бы ослабить одно из условий на норму. Напомним, что $\|x\| = 0$ влечет за собой $x = 0$ и что это условие необходимо для единственности пределов, т. е. для того, чтобы индуцированная топология была хаусдорфовой. Предположим, что $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ — семейство объектов, подчиненных всем условиям на нормы, кроме условия обращения x в нуль, когда $\rho_\alpha(x) = 0$ для какого-то α. Взамен предположим, что $x = 0$, если $\rho_\alpha(x) = 0$ для всех α; тогда легко понять, что в топологии, в которой сходимость означает, что $\rho_\alpha(x_\beta - x) \longrightarrow 0$ при каждом фиксированном α, пределы единственны. Введем поэтому такое

Определение. **Полунорма** на векторном пространстве V есть отображение $\rho\colon V \longrightarrow [0, \infty)$ со свойствами:

(i) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$;

(ii) $\rho(\alpha x) = |\alpha|\,\rho(x)$ для $\alpha \in \mathbb{C}$ (или $\mathbb{R}$).

Семейство полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ называется **разделяющим точки**, если

(iii) из условия $\rho_\alpha(x) = 0$ для всех $\alpha \in A$ следует, что $x = 0$.

Определение. **Локально выпуклое пространство** есть векторное пространство X (над $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$) с семейством полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$, разделяющим точки. **Естественная топология** на локально выпуклом пространстве есть слабейшая топология, в которой непрерывны все ρ_α и в которой непрерывна операция сложения.

Отложим временно обсуждение примеров и объяснение термина «локально выпуклое». Отметим только, что многие авторы в определении не требуют, чтобы полунормы разделяли точки, а при формулировке утверждений вводят это условие как дополнительное. Значение этого условия в том, что из него следует (задача 6а) такое

Предложение. Естественная топология локально выпуклого пространства (при нашем определении!) хаусдорфова.

База окрестностей нуля в естественной топологии задается множествами $\{N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \varepsilon} \mid \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A;\ \varepsilon > 0\}$, где

$$N_{\alpha_1, \ldots, \alpha_n; \varepsilon} = \{x \mid \rho_{\alpha_i}(x) < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Таким образом, направленность $x_\beta \to x$ тогда и только тогда, когда $\rho_\alpha(x_\beta - x) \to 0$ для всех $\alpha \in A$. Естественным путем расширяется и понятие полноты.

Определение. Направленность $\{x_\beta\}$ в локально выпуклом пространстве X называется **направленностью Коши**, если для всех $\varepsilon > 0$ и для каждой полунормы ρ_α существует такое β_0, что $\rho_\alpha(x_\beta - x_\gamma) < \varepsilon$, когда $\beta,\ \gamma > \beta_0$. Пространство X называется **полным**, если в нем каждая направленность Коши сходится.

Важной структурой на локально выпуклом пространстве является скорее естественная топология, чем конкретные полунормы, которые ее порождают. Назовем два семейства полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ на векторном пространстве X **эквивалентными**, если они порождают одну и ту же естественную топологию. Часто полезно иметь в виду следующий результат (задача 6b).

Предложение. Пусть $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$ — два семейства полунорм. Следующие условия равносильны:

(a) Рассматриваемые семейства полунорм эквивалентны.

(b) Каждая ρ_α непрерывна в d-естественной топологии, а каждая d_β непрерывна в ρ-естественной топологии.

(c) Для каждого $\alpha \in A$ существуют $\beta_1, \ldots, \beta_n \in B$ и $C > 0$, такие, что для всех $x \in X$

$$\rho_\alpha(x) \leqslant C(d_{\beta_1}(x) + \ldots + d_{\beta_n}(x)),$$

и для каждого $\beta \in B$ существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in A$ и $D > 0$, такие, что для всех $x \in X$

$$d_\beta(x) \leqslant D(\rho_{\alpha_1}(x) + \ldots + \rho_{\alpha_m}(x)).$$

Появление в теории локально выпуклых пространств выражений типа $C(d_{\beta_1}(x)+\ldots+d_{\beta_n}(x))$ носит совершенно общий характер. Поэтому полезно рассмотреть семейства полунорм со следующим специальным свойством.

Определение. Семейство $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ полунорм на векторном пространстве V называется **направленным**, если для всех $\alpha,\beta\in A$ существуют $\gamma\in A$ и C, такие, что для всех $x\in V$

$$\rho_\alpha(x)+\rho_\beta(x)\leqslant C\rho_\gamma(x).$$

Значит, по индукции, для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_n\in A$ существуют такие γ и D, что для всех $x\in V$

$$\rho_{\alpha_1}(x)+\ldots+\rho_{\alpha_n}(x)\leqslant D\rho_\gamma(x).$$

Если, например, $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—направленное семейство, то $\{\{x\mid\rho_\alpha(x)<\varepsilon\}\mid\alpha\in A,\ \varepsilon>0\}$—база окрестностей нуля. Направленные семейства полунорм существуют всегда:

Предложение. В каждом локально выпуклом пространстве существует направленное семейство полунорм, эквивалентное семейству, определяющему топологию пространства.

Доказательство. Если $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ определяет исходную топологию, то пусть B—множество конечных подмножеств в A. Если $F\in B$, то пусть $d_F=\sum_{\alpha\in F}\rho_\alpha$. Тогда семейство $\{d_F\}_{F\in B}$ направлено и эквивалентно исходному семейству. ∎

Рассмотрим кратко два примера. Дальше в § V.3 и § V.4 мы обсудим несколько других примеров; в частности, тем из читателей, кто хочет набраться опыта в обращении с эквивалентными полунормами и направленными семействами полунорм, полезно познакомиться с дополнением к § V.3, носящим технический характер.

Пример 1. Пусть X—векторное пространство, и пусть Y—множество разделяющих точки линейных функционалов на X. В § IV.5 мы ввели топологию $\sigma(X, Y)$. Это как раз локально выпуклая топология, порождаемая полунормами $\{\rho_l\mid l\in Y\}$, где $\rho_l(x)=|l(x)|$. Эта топология задается полунормами, но не определяется никакими нормами, если Y имеет бесконечную алгебраическую размерность (задача 2).

Пример 2. Пусть D—область комплексной плоскости, т. е. связное и открытое множество. Пусть $\mathscr{O}_D$—векторное пространство всех (однозначных) аналитических функций в D. Пусть $\rho_C(f)=\sup_{z\in C}|f(z)|$ для любого компактного $C\subset D$. Множество $\mathscr{O}_D$, наделенное топологией, определяемой полунормами ρ_C, есть полное локально выпуклое пространство. Действительно, предположим, что f_α является ρ_C-направленностью Коши для всех C. Тогда $f_\alpha(z) \to f(z)$ равномерно на компактных множествах. По классической теореме Вейерштрасса функция f аналитична (в основном из-за того, что f аналитична тогда и только тогда, когда для нее справедлива интегральная формула Коши, которая сохраняется при равномерном предельном переходе). Пусть

$$\rho_C^{(2)}(f) = \iint_{x+iy\in C} |f(x+iy)|^2\, dx\, dy.$$

Семейства $\{\rho_C^{(2)}\}$ и $\{\rho_C\}$ эквивалентны (задача 7).

Теперь мы готовы к обсуждению вопроса о том, почему локально выпуклое пространство так называется и какие геометрические идеи и построения с этим связаны. Специальными геометрическими свойствами обладают прежде всего окрестности $N_{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n;\ \varepsilon}$.

Определение. Множество C в векторном пространстве V называется **выпуклым**, если из $x, y \in C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$ вытекает, что $tx + (1-t)y \in C$; **уравновешенным** (или **закругленным**), если из $x \in C$ и $|\lambda| \leqslant 1$ вытекает, что $\lambda x \in C$; **поглощающим** (или **поглотителем**), если $\bigcup_{t>0} tC = V$, т. е. если для каждого $x \in V$ существует такое $s > 0$, что $sx \in C$.

Если C выпукло и V—векторное пространство над $\mathbb{R}$, то уравновешенность означает только, что $-x \in C$, когда $x \in C$; если V—векторное пространство над $\mathbb{C}$, то уравновешенность означает, что $e^{i\theta}x \in C$, когда $\theta \in [0, 2\pi)$ и $x \in C$ (так что закругленность — более подходящий термин).

Путем элементарного применения определений легко убедиться в том, что $N_{\alpha_1, \dots, \alpha_n;\ \varepsilon}$ выпуклы.

Предложение. Если $\rho_{\alpha_1}, \dots, \rho_{\alpha_n}$—полунормы на векторном пространстве V, то $\{x \mid |\rho_{\alpha_1}(x)| < \varepsilon, \dots, |\rho_{\alpha_n}(x)| < \varepsilon\}$—уравновешенное, выпуклое, поглощающее множество.

Это предложение—половина следующей основной теоремы:

Теорема V.1. Пусть V—векторное пространство с хаусдорфовой топологией, в которой сложение и умножение на скаляры раздельно непрерывны. Тогда V—локально выпуклое пространство (т. е. имеет топологию, заданную семейством полунорм) в том и только том случае, когда нуль обладает базой окрестностей, состоящей из уравновешенных, выпуклых, поглощающих множеств.

Доказательство второй половины теоремы: V имеет топологию, порождаемую полунормами, если нуль обладает базой окрестностей, состоящей из уравновешенных выпуклых поглощающих множеств,— покоится на следующей лемме.

Определение. Пусть C — поглощающее подмножество векторного пространства V с дополнительным свойством: если $x \in C$ и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $tx \in C$. **Функционал Минковского** (или **калибровка**) на множестве C есть отображение ρ: $V \to [0, \infty)$, задаваемое формулой

$$\begin{aligned}\rho(x) &= \inf\{\lambda \mid x \in \lambda C\} = \\ &= [\sup\{\mu \mid \mu x \in C\}]^{-1}.\end{aligned}$$

Лемма. (a) Если $t \geqslant 0$, то $\rho(tx) = t\rho(x)$ для любой калибровки и любого C.

(b) Если C выпукло, то $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$.

(c) Если C закруглено, то $\rho(\lambda x) = |\lambda| \rho(x)$.

(d) $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid \rho(x) \leqslant 1\}$.

Доказательство этой красивой леммы мы оставляем читателю в качестве упражнения.

Доказательство теоремы V.1. Пусть $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля, содержащая только выпуклые, уравновешенные, поглощающие множества; для каждого $U \in \mathcal{U}$ пусть ρ_U — калибровка на U. В силу пунктов (b) и (c) леммы ρ_U — полунорма, а в силу (d) окрестности нуля в исходной топологии те же, что и в локально выпуклой топологии, задаваемой полунормами $\{\rho_U \mid U \in \mathcal{U}\}$. Поскольку сложение раздельно непрерывно в обеих топологиях, окрестности любой точки в этих топологиях совпадают. ∎

В нормированных линейных пространствах линейное отображение из X в Y непрерывно тогда и только тогда, когда оно ограничено. Похожий результат справедлив и в локально выпуклых пространствах (задача 9):

Теорема V.2. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства с семействами полунорм $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и $\{d_\beta\}_{\beta \in B}$. Линейное отображение T: $X \to Y$ непрерывно тогда и только тогда, когда для всех $\beta \in B$ существуют $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in A$ и $C > 0$, такие, что

$$d_\beta(Tx) \leqslant C(\rho_{\alpha_1}(x) + \ldots + \rho_{\alpha_n}(x)).$$

Если $\{\rho_\alpha\}_{\alpha \in A}$ направлено, то T непрерывно тогда и только тогда, когда для всех $\beta \in B$

$$d_\beta(Tx) \leqslant D\rho_\alpha(x)$$

при некоторых $\alpha \in A$ и $D > 0$.

В заключение этого вводного раздела обсудим два применения теоремы Хана—Банаха (теоремы III.5) к локально выпуклым пространствам. Первое дает

Теорема V.3. Пусть X — локально выпуклое пространство, и пусть Y — его подпространство. Пусть $l\colon Y \to \mathbb{R}$ (или $\to \mathbb{C}$, если X комплексное) линейно и непрерывно. Тогда существует непрерывное линейное отображение $L\colon X \to \mathbb{R}$ (или $\to \mathbb{C}$), такое, что $L \restriction Y = l$.

Доказательство. Относительная топология на Y задается сужением непрерывных полунорм. Таким образом, $|l(x)| \leqslant C\rho(x)$ для некоторой непрерывной полунормы. Применяя теорему III.5 или III.6, получаем нужный результат. ∎

Итак, на локально выпуклых пространствах существует много непрерывных линейных функционалов; на самом деле их достаточно для разделения точек. Обозначим через X^* семейство непрерывных линейных функционалов на X и назовем его **топологическим сопряженным.**

Второе применение теоремы Хана—Банаха более геометрично и связано с идеей размещения замкнутой гиперплоскости между

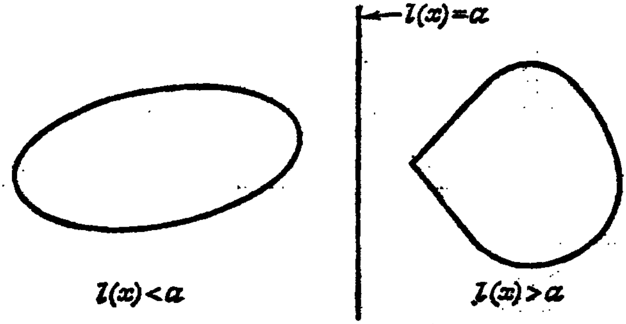

Рис. V.1.

непересекающимися выпуклыми множествами (рис. V.1). **Гиперплоскость** есть множество точек, для которых $l(x)=a$, где $l(x)$ — некоторый *вещественнозначный* (даже в комплексном случае) непрерывный линейный функционал.

Определение. Будем говорить, что два множества A и B в локально выпуклом пространстве **разделены гиперплоскостью,** если существуют непрерывный вещественнозначный функционал l и число $a \in \mathbb{R}$, такие, что $l(x) \leqslant a$ для $x \in A$ и $l(x) \geqslant a$ для $x \in B$. Если $l(x) < a$ для $x \in A$ и $l(x) > b$ для $x \in B$, будем говорить, что A и B **строго разделены.**

Теорема V.4 (теорема о разделяющей гиперплоскости). Пусть A и B — непересекающиеся выпуклые множества в локально выпуклом пространстве X. Тогда

(a) если A открыто, то A и B могут быть разделены гиперплоскостью;

(b) если A и B оба открыты, то они могут быть строго разделены гиперплоскостью;

(c) если A компактно, а B замкнуто, то A и B могут быть строго разделены гиперплоскостью.

Доказательство. (a) Выберем $-x \in A - B = \{y - z \mid y \in A,\ z \in B\}$. Пусть $C = A - B + \{x\}$. Тогда C — открытое и, значит, поглощающее, выпуклое, $0 \in C$ и $x \notin C$, поскольку A и B не пересекаются. Пусть ρ_C — функционал Минковского для C. Тогда $\rho_C(z+y) \leqslant \rho_C(z) + \rho_C(y)$ и $\rho_C(az) = a\rho_C(z)$, если $a > 0$. Определим l на $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ равенством $l(\lambda x) = \lambda$. Поскольку $x \notin C$, имеем $\rho_C(x) \geqslant 1$, и потому $l(x) \leqslant \rho_C(x)$. Таким образом, по теореме III.5, l продолжается на все X, причем $l(y) \leqslant \rho_C(y)$. Так как $C \cap (-C) \subset l^{-1}[-1,\ 1]$, функционал l непрерывен. В силу неравенства, $l(y) \leqslant 1$, если $y \in C$. В итоге $l(a) \leqslant l(b) + (1 - l(x))$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Так как $l(x) = 1$, то

$$\sup_{a \in A} l(a) \leqslant \inf_{b \in B} l(b),$$

и, значит, l разделяет A и B.

(b) Легко видеть, что если l — ненулевой линейный функционал и A открыто, то $l[A]$ открыто. Поскольку $l[A]$ и $l[B]$ открыты и могут пересекаться не более чем в одной точке, они вообще не пересекаются.

(c) Для каждого $a \in A$ найдем выпуклую окрестность нуля U_a, такую, что $(a + U_a) \cap B = \varnothing$. Множества $a + U_a$ покрывают A. Выберем конечное покрытие $a_1 + U_{a_1}, \ldots, a_n + U_{a_n}$. Пусть $U = U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$. Тогда $A + {}^1/_2 U$ и $B - {}^1/_2 U$ открыты и выпуклы, а $(A + {}^1/_2 U) \cap (B - {}^1/_2 U) = \varnothing$. В силу (b), $A + {}^1/_2 U$ и $B - {}^1/_2 U$ строго разделены, поэтому строго разделены A и B. ∎

В гл. XVI мы обсудим «алгебраическую теорему Хана—Банаха», т. е. такую форму теоремы о разделении, в которой не упоминаются ни открытые множества, ни непрерывные функции.

V.2. Пространства Фреше

Как мы видели в § III.5, полные метрические пространства обладают специальными свойствами, которые в случае банаховых пространств приводят к весьма сильным результатам. Поэтому интересно выделить те локально выпуклые пространства, которые