Теорема V.4 (теорема о разделяющей гиперплоскости). Пусть A и B—непересекающиеся выпуклые множества в локально выпуклом пространстве X. Тогда

(a) если A открыто, то A и B могут быть разделены гиперплоскостью;

(b) если A и B оба открыты, то они могут быть строго разделены гиперплоскостью;

(c) если A компактно, а B замкнуто, то A и B могут быть строго разделены гиперплоскостью.

Доказательство. (a) Выберем $-x \in A-B=\{y-z \mid y \in A,\ z \in B\}$. Пусть $C=A-B+\{x\}$. Тогда C—открытое и, значит, поглощающее, выпуклое, $0 \in C$ и $x \notin C$, поскольку A и B не пересекаются. Пусть ρ_C—функционал Минковского для C. Тогда $\rho_C(z+y) \leqslant \leqslant \rho_C(z)+\rho_C(y)$ и $\rho_C(az)=a\rho_C(z)$, если $a>0$. Определим l на $\{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ равенством $l(\lambda x)=\lambda$. Поскольку $x \notin C$, имеем $\rho_C(x) \geqslant 1$, и потому $l(x) \leqslant \rho_C(x)$. Таким образом, по теореме III.5, l продолжается на все X, причем $l(y) \leqslant \rho_C(y)$. Так как $C \cap (-C) \subset \subset l^{-1}[-1,\ 1]$, функционал l непрерывен. В силу неравенства, $l(y) \leqslant 1$, если $y \in C$. В итоге $l(a) \leqslant l(b)+(1-l(x))$ для любых $a \in A$ и $b \in B$. Так как $l(x)=1$, то

$$\sup_{a \in A} l(a) \leqslant \inf_{b \in B} l(b),$$

и, значит, l разделяет A и B.

(b) Легко видеть, что если l—ненулевой линейный функционал и A открыто, то $l[A]$ открыто. Поскольку $l[A]$ и $l[B]$ открыты и могут пересекаться не более чем в одной точке, они вообще не пересекаются.

(c) Для каждого $a \in A$ найдем выпуклую окрестность нуля U_a, такую, что $(a+U_a) \cap B=\varnothing$. Множества $a+U_a$ покрывают A. Выберем конечное покрытие $a_1+U_{a_1}, \ldots, a_n+U_{a_n}$. Пусть $U= =U_{a_1} \cap \ldots \cap U_{a_n}$. Тогда $A+{}^1/_2 U$ и $B-{}^1/_2 U$ открыты и выпуклы, а $(A+{}^1/_2 U) \cap (B-{}^1/_2 U)=\varnothing$. В силу (b), $A+{}^1/_2 U$ и $B-{}^1/_2 U$ строго разделены, поэтому строго разделены A и B. ∎

В гл. XVI мы обсудим «алгебраическую теорему Хана—Банаха», т. е. такую форму теоремы о разделении, в которой не упоминаются ни открытые множества, ни непрерывные функции.

V.2. Пространства Фреше

Как мы видели в § III.5, полные метрические пространства обладают специальными свойствами, которые в случае банаховых пространств приводят к весьма сильным результатам. Поэтому интересно выделить те локально выпуклые пространства, которые одновременно являются полными метрическими пространствами. Прежде всего нужно выяснить, какие локально выпуклые пространства метризуемы, т. е. имеют топологию, порождаемую метрикой. Это, конечно, не только те пространства, топология которых задается нормой, ибо если ρ — метрика, то $\rho(x, 0)$ — не обязательно норма, так как $\rho(\lambda x, 0)$ не обязательно равно $\lambda\rho(x, 0)$.

Теорема V.5. Пусть X — локально выпуклое пространство. Следующие условия равносильны:

(a) X метризуемо;

(b) нуль имеет счетную базу окрестностей;

(c) топология на X порождается некоторым счетным семейством полунорм.

Доказательство. Покажем, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b) есть свойство любого метрического пространства.

(b) $\Rightarrow$ (c) вытекает из следующих двух фактов: если $\mathcal{U}$ — любая база окрестностей, состоящая из выпуклых уравновешенных множеств, то калибровки множеств $U \in \mathcal{U}$ порождают исходную топологию; в случае когда нуль имеет счетную базу окрестностей, можно найти счетную же базу окрестностей, состоящую из выпуклых уравновешенных множеств.

(c) $\Rightarrow$ (a). Пусть $\{\rho_n\}_{n=1, 2, \ldots}$ — семейство полунорм, порождающих топологию. Определим ρ на $X \times X$ равенством

$$\rho(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left[\frac{\rho_n(x-y)}{1+\rho_n(x-y)}\right]. \qquad \text{(V.1)}$$

Поскольку $a/(1+a) < 1$ для любого $a > 0$, имеем $\rho(x, y) < \infty$. Легко видеть, что ρ — метрика и что она порождает ту же топологию, что и $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$ (задача 10 a). ∎

В метризуемом пространстве два понятия полноты совпадают (задача 10 b):

Предложение. Направленность $\{x_\alpha\}$ есть направленность Коши в метрике ρ из (V.1) тогда и только тогда, когда она есть направленность Коши в каждой ρ_n. Таким образом, метризуемое локально выпуклое пространство X полно как метрическое пространство тогда и только тогда, когда оно полно как локально выпуклое пространство.

Определение. Полное метризуемое локально выпуклое пространство называется **пространством Фреше**.

Пространство Фреше как полное метрическое пространство удовлетворяет теореме Бэра о категории, и потому для него можно доказать аналоги теорем, установленных в § III.5.

Теорема V.6. Если X и Y — пространства Фреше и $f: X \to Y$ — непрерывная биекция, то f — открытое отображение.

Теорема V.7. Пусть X и Y — пространства Фреше; пусть $\mathcal{F}$ — семейство непрерывных отображений из X в Y, такое, что для каждой непрерывной полунормы ρ на Y и каждого $x \in X$ множество $\{\rho(F(x)) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ограничено. Тогда для каждой ρ на Y существуют непрерывная полунорма d на X и $C > 0$, такие, что

$$\rho(Fx) \leqslant Cd(x)$$

для всех $x \in X$ и $F \in \mathcal{F}$.

О применениях теоремы V.6 см. задачу 12. Обращаясь к применению теоремы V.7, прежде всего отметим, что сюда без изменений переносится следствие теоремы III.9:

Следствие. Если X — пространство Фреше, то любой раздельно непрерывный билинейный функционал B непрерывен, т. е. $|B(f, g)| \leqslant C\rho_1(f)\rho_2(g)$ для некоторых непрерывных полунорм ρ_1, ρ_2.

Другое следствие теоремы V.7 можно рассматривать как замаскированную теорему I.27:

Теорема V.8. Пусть X — пространство Фреше, и пусть $f_n \in X^*$ — *последовательность*, сходящаяся к $f \in X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$. Тогда $f_n \to f$ равномерно на компактных подмножествах в X.

Доказательство. Поскольку $f_n(x)$ сходится, она ограничена, поэтому можно найти непрерывную полунорму ρ на X, такую, что $|f_n(x)| \leqslant C\rho(x)$. Если заданы компактное подмножество $D \subset X$ и некоторое ε, выберем конечное покрытие D множествами $U_1, \ldots, U_m$, такое, чтобы из $x, y \in U_k$ вытекало $\rho(x-y) \leqslant \varepsilon/3C$. Далее, выберем такие $x_k \in U_k$ и N, чтобы при $n > N$ было $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/3$ для $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\varepsilon/3$-прием даст

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ если } n > N. \blacksquare$$

V.3. Быстро убывающие функции и обобщенные функции умеренного роста

Здесь мы хотим обсудить очень удобное пространство функций — пространство $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций и его сопряженное — пространство обобщенных функций умеренного роста. Для того чтобы определение прошло гладко, введем сначала некоторые обозначения. Функцию на $\mathbb{R}^n$ будем записывать просто как $f(x)$, $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Множество всех наборов из n неотрицательных целых чисел $\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ обозначим через I_+^n; $I_+^1 = I_+$.