Теорема V.6. Если X и Y — пространства Фреше и $f: X \to Y$ — непрерывная биекция, то f — открытое отображение.

Теорема V.7. Пусть X и Y — пространства Фреше; пусть $\mathcal{F}$ — семейство непрерывных отображений из X в Y, такое, что для каждой непрерывной полунормы ρ на Y и каждого $x \in X$ множество $\{\rho(F(x)) \mid F \in \mathcal{F}\}$ ограничено. Тогда для каждой ρ на Y существуют непрерывная полунорма d на X и $C > 0$, такие, что

$$\rho(Fx) \leqslant Cd(x)$$

для всех $x \in X$ и $F \in \mathcal{F}$.

О применениях теоремы V.6 см. задачу 12. Обращаясь к применению теоремы V.7, прежде всего отметим, что сюда без изменений переносится следствие теоремы III.9:

Следствие. Если X — пространство Фреше, то любой раздельно непрерывный билинейный функционал B непрерывен, т. е. $|B(f, g)| \leqslant C\rho_1(f)\rho_2(g)$ для некоторых непрерывных полунорм ρ_1, ρ_2.

Другое следствие теоремы V.7 можно рассматривать как замаскированную теорему I.27:

Теорема V.8. Пусть X — пространство Фреше, и пусть $f_n \in X^*$ — *последовательность*, сходящаяся к $f \in X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$. Тогда $f_n \to f$ равномерно на компактных подмножествах в X.

Доказательство. Поскольку $f_n(x)$ сходится, она ограничена, поэтому можно найти непрерывную полунорму ρ на X, такую, что $|f_n(x)| \leqslant C\rho(x)$. Если заданы компактное подмножество $D \subset X$ и некоторое ε, выберем конечное покрытие D множествами $U_1, \ldots, U_m$, такое, чтобы из $x, y \in U_k$ вытекало $\rho(x-y) \leqslant \varepsilon/3C$. Далее, выберем такие $x_k \in U_k$ и N, чтобы при $n > N$ было $|f_n(x_i) - f(x_i)| < \varepsilon/3$ для $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\varepsilon/3$-прием даст

$$\sup_{x \in D} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon, \text{ если } n > N. \blacksquare$$

V.3. Быстро убывающие функции и обобщенные функции умеренного роста

Здесь мы хотим обсудить очень удобное пространство функций — пространство $\mathcal{S}$ быстро убывающих функций и его сопряженное — пространство обобщенных функций умеренного роста. Для того чтобы определение прошло гладко, введем сначала некоторые обозначения. Функцию на $\mathbb{R}^n$ будем записывать просто как $f(x)$, $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Множество всех наборов из n неотрицательных целых чисел $\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$ обозначим через I_+^n; $I_+^1 = I_+$.

Положим $|\alpha|=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$. Далее, пусть D^α обозначает $\dfrac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\ldots\partial x_n^{\alpha_n}}$, а $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\ldots x_n^{\alpha_n}$.

Определение. Множество **быстро убывающих функций** $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ есть множество бесконечно дифференцируемых комплекснозначных функций $\varphi(x)$ на $\mathbb{R}^n$, для которых при всех $\alpha, \beta\in I_+^n$

$$\|\varphi\|_{\alpha,\beta}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|x^\alpha D^\beta\varphi(x)|<\infty.$$

Таким образом, функции из $\mathscr{S}$ — это те функции, которые вместе со своими производными убывают быстрее любого обратного полинома.

Теорема V.9. Векторное пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ вместе с естественной топологией, задаваемой полунормами $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, есть пространство Фреше.

Доказательство. Читатель легко проверит, что $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ — полунормы. Поскольку их счетное число, $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ метризуемо (теорема V.5). Следовательно, остается показать, что $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ полно. Предположим, что f_m — последовательность Коши по каждой $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$. Тогда $x^\alpha D^\beta f_m\longrightarrow g_{\alpha,\beta}$ равномерно при $m\longrightarrow\infty$, поскольку $C(\mathbb{R}^n)$ полно. Если удастся показать, что $g=g_{0,0}$ — функция класса C^∞ и $g_{\alpha,\beta}=x^\alpha D^\beta g$, то g будет лежать в $\mathscr{S}$, а $\lim\limits_{m\to\infty} f_m$ в топологии пространства $\mathscr{S}$ будет равен g. Докажем, что g — класса C^1 и $dg/dx=g_{0,1}$ в случае $n=1$. Общий случай рассматривается аналогично. Известно, что

$$f_n(x)=f_n(0)+\int_0^x f_n'(t)\,dt.$$

Поскольку $f_n'\longrightarrow g_{0,1}$ равномерно, имеем

$$g(x)=g(0)+\int_0^x g_{0,1}(t)\,dt.$$

Таким образом, g принадлежит классу C^1 и $g'=g_{0,1}$. ∎

По техническим причинам часто удобно иметь направленное семейство полунорм, поэтому для $k, m\in I_+$ и $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ мы полагаем

$$\|f\|_{k,m}=\sum_{\substack{|\alpha|\leqslant k\\ |\beta|\leqslant m}}\|f\|_{\alpha,\beta}.$$

Определение. Топологическое сопряженное пространство к $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, обозначаемое через $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, называется **пространством**

обобщенных функций (распределений) умеренного роста.

Для того чтобы линейный функционал T на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ принадлежал $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, он должен быть непрерывным. По теореме V.2 это эквивалентно существованию полунормы $\|\cdot\|_{k,m}$ со свойством $|T(\varphi)| \leqslant C\|\varphi\|_{k,m}$ для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Обсудим несколько примеров, ограничиваясь случаем $n=1$; читатель сможет легко обобщить их на случай произвольного n.

Пример 1 ($\mathscr{S}$). Пусть $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^1)$; определим функционал $g(\cdot)$ на $\mathscr{S}$ формулой

$$g(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\varphi(x)\,dx. \tag{V.2}$$

Ясно, что $g(\cdot)$ линеен и

$$|g(\varphi)| \leqslant \|g\|_{L^1(\mathbb{R})}\|\varphi\|_\infty,$$

а $\|\cdot\|_\infty$ — непрерывная полунорма. Более того, если $g_1 \neq g_2$ как функции из $\mathscr{S}$, то $g_1(\cdot) \neq g_2(\cdot)$ как элементы в $\mathscr{S}'$, ибо $\mathscr{S}$ плотно в L^2 и из $g_1 \neq g_2$ в $\mathscr{S}$ вытекает, что $g_1 \neq g_2$ в L^2, откуда следует, что $g_1 \neq g_2$ в $(L^2)^*$, а потому $g_1 \neq g_2$ в $\mathscr{S}'$.

Итак, мы видим, что $\mathscr{S}$ допускает естественное вложение в $\mathscr{S}'$. Если $\mathscr{S}'$ снабжено топологией $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$, то это вложение непрерывно, поскольку, как мы увидим дальше, $\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R})}$ — непрерывная полунорма на $\mathscr{S}$. Более того, $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}'$ в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ (см. задачи 16 и 19 или следствие 1 теоремы V.14 в дополнении к этому разделу). Это обстоятельство подсказывает такой способ продолжения непрерывных отображений $T: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ на все $\mathscr{S}'$: поскольку естественное вложение $\iota: \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ непрерывно, отображение $\iota \circ T: \mathscr{S} \to \mathscr{S}'$ тоже непрерывно. Так как $\mathscr{S}$ плотно в $\mathscr{S}'$, существует по крайней мере одно непрерывное продолжение $\iota \circ T: \mathscr{S}' \to \mathscr{S}'$. Чтобы найти это непрерывное продолжение, нужен какой-нибудь способ строить непрерывные отображения из $\mathscr{S}'$ в $\mathscr{S}'$. Один простой способ состоит в следующем. Предположим, что $S: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$ непрерывно. Определим **сопряженное отображение** $S': l \mapsto S'(l)$, $l \in \mathscr{S}'$, равенством $[S'(l)](g) = l(Sg)$ для всех $g \in \mathscr{S}$. Очевидно, что если $l_\alpha \to l$ в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$, то $S'(l_\alpha) \to S'(l)$ в той же топологии. Таким образом, для продолжения T мы ищем такое отображение $S: \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, чтобы $S' \restriction \mathscr{S} = T$, и тогда продолжаем T с помощью S'. В случае когда не возникает недоразумений, мы обозначаем это продолжение тем же символом T. Дальнейшее обсуждение сопряженных отображений проводится в § VI.2.

Изложенная идея станет яснее после рассмотрения приводимых ниже примеров. Другая топология на $\mathscr{S}'$ вводится в § V.7

(топология $\beta(\mathcal{S}', \mathcal{S}) \equiv \tau(\mathcal{S}', \mathcal{S})$), и там мы увидим, что сопряженное отображение S' непрерывно, если такая топология вводится и на области определения, и на области значений (см. задачу 17).

Пример 2 (L^p). Множество $\mathcal{S}$ — это подмножество каждого $L^p(\mathbb{R})$, и тождественное отображение $\mathcal{S}$ в L^p непрерывно, ибо при $p=1$

$$\|f\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1}[(1+x^2)|f|]\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \pi(\|f\|_\infty + \|x^2 f\|_\infty),$$

а при произвольном p

$$\|f\|_p \leqslant \|\,|f|^{1/p}|f|^{1-1/p}\|_p \leqslant \|f\|_1^{1/p}\|f\|_\infty^{1-1/p}.$$

Если $g \in L^q$, $q^{-1}+p^{-1}=1$ и $\varphi \in \mathcal{S}$, то

$$\left|\int g(x)\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \|g\|_q \|\varphi\|_p.$$

Следовательно, $\varphi \mapsto \int g(x)\varphi(x)\,dx$ — непрерывное отображение $\mathcal{S}$ в $\mathbb{C}$, и тем самым определено непрерывное вложение L^q в $\mathcal{S}'$.

Итак, $\mathcal{S}'$ содержит образы различных пространств функций при естественных вложениях. Обычно вложения игнорируются и говорят просто о функциях $g(x)$ из $\mathcal{S}'$.

Пример 3 (дельта-функция). Пусть $b \in \mathbb{R}$. Определим линейный функционал δ_b равенством $\delta_b(\varphi)=\varphi(b)$. Поскольку $|\delta_b(\varphi)| \leqslant \|\varphi\|_{0,0}$, имеем $\delta_b(\cdot) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. *Функции* $g(x)$, такой, что $\delta_b(\varphi) = \int g(x)\varphi(x)\,dx$ для всех $\varphi \in \mathcal{S}$, не существует, хотя существует мера μ_b (чисто точечная), для которой

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\,d\mu_b(x).$$

Однако символика (V.2) из примера 1 так соблазнительна, что часто пишут

$$\delta_b(\varphi) = \int \varphi(x)\,\delta(x-b)\,dx, \qquad \text{(V.3)}$$

где $\delta(x-b)$ — не функция; (V.3) нужно рассматривать просто как символическую запись. Символ $\delta(x-b)$ называют **дельта-функцией в точке** b.

Пример 4 (полиномиально ограниченные меры). Предположим, что ν — любая конечная мера. Тогда $f \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,d\nu$ — линейный функционал на $\mathcal{S}$, и поскольку $\left|\int f\,d\nu\right| \leqslant \nu(\mathbb{R})\|f\|_\infty$, этот функционал лежит в $\mathscr{S}'$. В общем случае, если ν — такая мера на $\mathbb{R}$, что $\nu([-D, D]) \leqslant C(D^n+1)$ для некоторых C и n и всех $D \in \mathbb{R}_+$, то $f \mapsto \int\limits_{-\infty}^{\infty} f d\nu$ лежит в $\mathscr{S}'$.

Пример 5 (производная от $\delta(x)$). Для того чтобы убедиться, что не всякий элемент $g \in \mathscr{S}'$ отвечает линейной комбинации мер, рассмотрим $\delta'(f) = -f'(0)$. Это непрерывный линейный функционал, но он не отвечает никакой мере (задача 21).

Пример 6 ($\mathscr{P}(1/x)$). Главное значение интеграла в смысле Коши задается формулой

$$\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right): \ f \mapsto \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)\, dx.$$

Для того чтобы убедиться, что правая часть конечна для любой $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$, а все соотношение задает распределение, заметим, что

$$\int\limits_{|x| \geqslant \varepsilon} \frac{1}{x} f(x)\, dx = \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{x}\, dx.$$

Поскольку $[f(x)-f(-x)]/x \to 2f'(0)$ при $x \to 0$, можно написать

$$\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f) = \int\limits_{0}^{\infty} \frac{f(x)-f(-x)}{x}\, dx,$$

откуда и следует конечность. Далее,

$$\left|\frac{1}{x}[f(x)-f(-x)]\right| \leqslant \frac{1}{x} \int\limits_{-x}^{x} |f'(t)|\, dt \leqslant 2\, \|f'\|_\infty,$$

и потому

$$\left|\mathscr{P}\left(\frac{1}{x}\right)(f)\right| \leqslant 2\int\limits_{0}^{1} \|f'\|_\infty dx + \left|\int\limits_{1}^{\infty} (xf(x))\frac{dx}{x^2}\right| \leqslant$$
$$\leqslant 2\,\|f\|_{1,0} + \|f\|_{0,1}.$$

Следовательно, $\mathscr{P}(1/x)$ — распределение. При этом выполняется известная формула:

$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{x-x_0+i\varepsilon} = \mathscr{P}\left(\frac{1}{x-x_0}\right) - i\pi\delta(x-x_0), \qquad \text{(V.4)}$$

в которой все величины рассматриваются как распределения, а $\lim\limits_{\varepsilon \downarrow 0}$ понимается в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ (задача 22).

Пример 7 (O_M^n). Пусть O_M^n—множество бесконечно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}^n$, которые полиномиально ограничены вместе со своими производными, т. е. $f \in O_M^n$ означает, что f класса C^∞ и что для каждого $\alpha \in I_+^n$ существуют $N(\alpha)$ и $C(\alpha)$, такие, что

$$|(D^\alpha f)(x)| \leqslant C[1+x^2]^N,$$

где $x^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. Ясно, что $O_M^n \subset \mathcal{S}'$.

Множество O_M полезно по ряду причин. Если $F \in O_M$, то нетрудно видеть, что $Ff \in \mathcal{S}$, когда $f \in \mathcal{S}$, и $f \mapsto Ff$—непрерывное отображение $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$ (задача 23a). На самом деле измеримая функция F определяет непрерывное отображение $f \mapsto Ff$ множества $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ тогда и только тогда, когда $F \in O_M$ (задача 23b).

Пусть $F \in O_M$. Умножение на F переводит $\mathcal{S}$ в $\mathcal{S}$ непрерывно. Это дает первый способ проверки идеи, изложенной вслед за примером 1. Можно ли найти отображение S: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, такое, чтобы для любых f, $g \in \mathcal{S}$ было $(Ff)(g) = (S'f)(g) = f(Sg)$, т. е. чтобы $\int F(x) f(x) g(x)\, dx = \int f(x)(Sg)(x)\, dx$? Ответ очевиден: надо взять $(Sg)(x) = F(x) g(x)$.

Операция 1. Пусть $F \in O_M^n$, и пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Определяем $FT \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ равенством

$$(FT)(\varphi) = T(F\varphi).$$

Пространство $\mathcal{S}$ было выбрано, в частности, для того, чтобы $f \mapsto D^\alpha f$ было непрерывным. Заметим, что $\|D^\alpha f\|_{\gamma,\delta} = \|f\|_{\gamma,\delta+\alpha}$, где $\delta+\alpha = \langle \delta_1+\alpha_1, \ldots, \delta_n+\alpha_n \rangle$. Для продолжения D^α на $\mathcal{S}'$ мы ищем такое S: $\mathcal{S} \to \mathcal{S}$, чтобы для f, $g \in \mathcal{S}$ было $(D^\alpha f)(g) = f(Sg)$, т. е. $\int (D^\alpha f)(x) g(x)\, dx = \int f(x)(Sg)(x)\, dx$. На первый взгляд это кажется трудным, но интегрирование по частям дает $\int (D^\alpha f) g = (-1)^{|\alpha|} \int f(D^\alpha g)$, поэтому мы полагаем $S = (-1)^{|\alpha|} D^\alpha$.

Операция 2. Пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, $\alpha \in I_+^n$. **Слабая производная** $D^\alpha T$, или **производная в смысле обобщенных функций**, определяется соотношением

$$(D^\alpha T)(f) = (-1)^{|\alpha|} T(D^\alpha f).$$

В символическом виде

$$\int (D^\alpha T)(x) f(x)\, dx = (-1)^{|\alpha|} \int T(x) \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}}(x)\, dx.$$

Таким образом, мы определили производную, которая на O_M^n совпадает с обычной производной и для которой по определению интегрирование по частям не дает граничных членов на бесконечности.

Пример 8. Пусть

$$g(x)=\begin{cases} x, & x\geqslant 0, \\ 0, & x\leqslant 0, \end{cases} \quad x\in\mathbb{R}.$$

Тогда g непрерывна, но дифференцируема в классическом смысле не везде. Поскольку $\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\varphi(x)\,dx\leqslant \|x\varphi\|_{L^1}$, функция $g\in\mathscr{S}'$, так что она имеет производную в $\mathscr{S}'$. По определению

$$\left(\frac{d}{dx}g\right)(\varphi)=-g\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\int\limits_0^\infty x\varphi'(x)\,dx=\int\limits_0^\infty \varphi(x)\,dx.$$

Следовательно, $dg(x)/dx=H(x)$, где H — **функция Хевисайда**:

$$H(x)=\begin{cases} 1, & x\geqslant 0, \\ 0, & x<0. \end{cases}$$

Функция H даже не непрерывна, но она тоже имеет производную в $\mathscr{S}'$, задаваемую соотношением

$$\left(\frac{dH}{dx}\right)(\varphi)=-H\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)=-\int\limits_0^\infty \varphi'(x)\,dx=\varphi(0),$$

так что $dH/dx=\delta$. Но и δ-функция имеет производную; она описана в примере 5.

Последний пример показывает, что даже вообще не функция δ-функция является второй производной от непрерывной функции. И это типично для обобщенных функций умеренного роста, ибо справедлива

Теорема V.10 (теорема регулярности для обобщенных функций). Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T=D^\beta g$ для некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функции g при некотором $\beta\in I_+^n$, т. е. для всех $\varphi\in\mathscr{S}$

$$T(\varphi)=\int (-1)^{|\beta|}\,g(x)\,(D^\beta\varphi)(x)\,d^nx.$$

Доказательство дано в дополнении к этому разделу (см. также задачи 24 и 25).

Операция иного типа порождается переносами. Пусть U_a: $\mathscr{S}\to\mathscr{S}$ задано правилом $(U_af)(x)=f(x-a)$. Тогда $\int (U_af)(x)\,g(x)\,dx=\int f(x)\,(U_{-a}g)(x)\,dx$, если f, $g\in\mathscr{S}$. В итоге получается

Операция 3 (перенос). При $T \in \mathscr{S}'$ функционал $U_a T$ определяется соотношением

$$(U_a T)(\varphi) = T(U_{-a}\varphi).$$

Аналогично, если A—обратимое линейное отображение $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то равенство $(V(A)f)(x) = f(A^{-1}x)$ определяет отображение $V(A)$: $\mathscr{S} \to \mathscr{S}$. В результате приходим к следующему определению:

Операция 4 (линейная замена координат). Если $T \in \mathscr{S}'$, то $V(A)T$ задается равенством

$$[V(A)T](\varphi) = |\det A|\, T(V(A^{-1})\varphi).$$

Этим $V(A)$ продолжается с $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}'$ (см. задачу 28a).

В гл. IX мы обсудим две другие операции на $\mathscr{S}'$: свертку и преобразование Фурье.

Говорить о равенстве распределения нулю в какой-то точке x бессмысленно, но равенство нулю в окрестности x имеет смысл.

Определение. Пусть Ω—открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Говорят, что $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ **равно нулю в** Ω, если $T(\varphi) = 0$ для всех φ, имеющих носитель в Ω (т. е. для φ, равных нулю вне Ω). **Носитель** T (обозначается $\operatorname{supp} T$) есть дополнение наибольшего открытого множества, на котором T равно нулю. Если $T - S$ равно нулю на Ω, говорят, что $T = S$ на Ω.

Введенные понятия обобщают понятия, относящиеся к обычным функциям $\varphi \in \mathscr{S}$ (задача 28b). Сверх того, справедлив следующий простой и интуитивно ясный результат (задача 29):

Теорема V.11. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Тогда

$$T = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha (D^\alpha \delta)$$

с подходящими c_α и m.

Пример 9 (перенормировка функционала $(1/x)_+$). Рассмотрим функцию $(1/x)_+ = H(x)x^{-1}$. Поскольку $\int_0^1 (1/x)\,dx = \infty$, функция $(1/x)_+$ *не определяет* распределения. Пусть $\mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0) = \{f \in \mathscr{S} \mid \operatorname{supp} f \subset \mathbb{R}\setminus 0\}$. Если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0)$, то $\int (1/x)_+ f(x)\,dx$ имеет смысл. Следовательно, $(1/x)_+$ определяет линейный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0)$, который, как мы увидим ниже, непрерывен. В силу теоремы Хана—Банаха этот функционал, заданный на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0)$, имеет продолжения на все пространство $\mathscr{S}(\mathbb{R})$, которые мы называем «перенормировками $(1/x)_+$». В качестве явных примеров продолжений рассмотрим

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{+,M}(f)=\int_0^M \frac{f(x)-f(0)}{x}\,dx+\int_M^\infty \frac{f(x)}{x}\,dx.$$

Поскольку эти отображения непрерывны на $\mathscr{S}$, функционал $(1/x)_+$ непрерывен на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0)$. Каков произвол в перенормировке? Если T и S — две перенормировки функционала $(1/x)_+$, их разность $T-S$ равна нулю на $\mathscr{S}(\mathbb{R}\setminus 0)$ и, таким образом, имеет носитель, равный $\{0\}$; поэтому $T-S=\sum\limits_{|\alpha|<m} c_\alpha D^\alpha\delta$. Например,

$$\left(\frac{1}{x}\right)_{+,M}-\left(\frac{1}{x}\right)_{+,N}=-\ln\left(\frac{M}{N}\right)\delta(x).$$

При принятом определении перенормированный функционал $(1/x)_+$ содержит бесконечное число свободных констант. Однако можно доказать, что $\int\limits_0^\infty [f(x)/x]\,dx<\infty$, если $f\in\mathscr{S}$ и $f(0)=0$; поэтому на самом деле имеет смысл продолжить $(1/x)_+$ с множества $\{f\in\mathscr{S}\mid f(0)=0\}$ на $\mathscr{S}$. Если принять такое условие, то единственной перенормировкой функционала $(1/x)_+$ будет $(1/x)_{+,M}$, причем она содержит только одну свободную константу (о связи между этими двумя определениями см. задачу 32).

Именно в духе примера 9 интерпретировали Боголюбов и Хепп перенормировки диаграмм Фейнмана в x-пространстве; перенормировочные константы, например перенормированные масса и заряд, выступают у них как свободные константы, аналогичные $\ln(M/N)$ в примере 9. Детали см. в ссылках, указанных в Замечаниях.

В заключение еще одна полезная теорема о $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$. Для того чтобы оценить ее значение, давайте рассмотрим сначала случай пространства L^p, где аналогичная теорема не справедлива. Предположим, что $p^{-1}+q^{-1}=1$, $p<\infty$, $q<\infty$ и $F\in L^q(\mathbb{R}^2)=[L^p(\mathbb{R}\times\mathbb{R})]^*$. Пусть $f, g\in L^p(\mathbb{R})$; тогда $f(x)g(y)\in L^p(\mathbb{R}^2)$, так что

$$F(f,g)=\int F(x,y)f(x)g(y)\,dx\,dy<\infty.$$

Более того,

$$|F(f,g)|\leqslant\|F\|_{L^q(\mathbb{R}^2)}\|f\|_p\|g\|_p,$$

и потому F определяет непрерывную билинейную форму на L^p. Конечно, не каждая билинейная форма относится к такому типу. Например, если $p=2$, билинейная форма $(\bar f, g)=\int f(x)g(x)\,dx$ не может быть представлена в виде $(\bar f, g)=\int F(x,y)f(x)g(y)\,dxdy$, где $F\in L^2(\mathbb{R}^2)$.

Ситуация в $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^*=\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ совершенно иная:

Теорема V.12 (теорема о ядре). Пусть $B(f, g)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда существует единственное распределение $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, такое, что $B(f, g)=T(f\otimes g)$, где

$$(f\otimes g)(x_1, \ldots, x_{n+m})=f(x_1, \ldots, x_n)\,g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

То, что раздельная непрерывность влечет за собой непрерывность, вытекает из того, что $\mathscr{S}$ — пространство Фреше (теорема V.9), и из следствия теоремы V.7. А то, что непрерывный функционал имеет требуемую форму, доказано в дополнении к этому разделу (следствие 4 теоремы V.14). Теорему V.12 можно расширить на полилинейные функционалы (задачи 34 и 35).

Дополнение к § V.3. N-представление для $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$

В этом дополнении доказано несколько теорем о пространствах $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$. Доказательства основаны на реализации $\mathscr{S}$, а значит, и $\mathscr{S}'$ как пространств последовательностей (а именно в виде пространства s из § III.1). Такое построение в свою очередь разбивается на два шага. Первый шаг — это задание топологии в $\mathscr{S}$ с помощью эквивалентного исходному семейства L^2-норм. Для того чтобы решительно отличать эти новые нормы от норм $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, мы вместо $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ будем писать

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}=\|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

и определим

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2}=\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда справедлива

Лемма 1. Семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ и $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны.

Доказательство. Чтобы не усложнять обозначений, проведем доказательство для случая $n=1$. Поскольку $(1+x^2)^{-1}\in L^2$, имеем $\|f\|_2\leqslant\|(1+x^2)^{-1}\|_2\|(1+x^2)f\|_\infty$, так что

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2}\leqslant C(\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}+\|f\|_{\alpha+2,\beta,\infty}).$$

С другой стороны, $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f'(t)\,dt$, так что

$$\|f\|_\infty\leqslant\|f'\|_1\leqslant\|(1+x^2)f'\|_2\|(1+x^2)^{-1}f\|_2,$$

и, поскольку $(x^\alpha D^\beta f)'=\alpha x^{\alpha-1}D^\beta f+x^\alpha D^{\beta+1}f$, получаем

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}\leqslant C(\alpha\|f\|_{\alpha-1,\beta,2}+\|f\|_{\alpha,\beta+1,2}+\alpha\|f\|_{\alpha+1,\beta,2}+\|f\|_{\alpha+2,\beta+1,2}). \blacksquare$$