Ситуация в $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $\mathscr{S}(\mathbb{R}\times\mathbb{R})^*=\mathscr{S}'(\mathbb{R}^2)$ совершенно иная:

*Теорема V.12* (теорема о ядре). Пусть $B(f, g)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\otimes\mathscr{S}(\mathbb{R}^m)$. Тогда существует единственное распределение $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, такое, что $B(f, g)=T(f\otimes g)$, где

$$(f\otimes g)(x_1, \ldots, x_{n+m})=f(x_1, \ldots, x_n)\,g(x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}).$$

То, что раздельная непрерывность влечет за собой непрерывность, вытекает из того, что $\mathscr{S}$ — пространство Фреше (теорема V.9), и из следствия теоремы V.7. А то, что непрерывный функционал имеет требуемую форму, доказано в дополнении к этому разделу (следствие 4 теоремы V.14). Теорему V.12 можно расширить на полилинейные функционалы (задачи 34 и 35).

## Дополнение к § V.3. $N$-представление для $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$

В этом дополнении доказано несколько теорем о пространствах $\mathscr{S}$ и $\mathscr{S}'$. Доказательства основаны на реализации $\mathscr{S}$, а значит, и $\mathscr{S}'$ как пространств последовательностей (а именно в виде пространства $s$ из § III.1). Такое построение в свою очередь разбивается на два шага. Первый шаг — это задание топологии в $\mathscr{S}$ с помощью эквивалентного исходному семейства $L^2$-норм. Для того чтобы решительно отличать эти новые нормы от норм $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$, мы вместо $\|\cdot\|_{\alpha,\beta}$ будем писать

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}=\|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

и определим

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2}=\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Тогда справедлива

*Лемма 1.* Семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ и $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ эквивалентны.

*Доказательство.* Чтобы не усложнять обозначений, проведем доказательство для случая $n=1$. Поскольку $(1+x^2)^{-1}\in L^2$, имеем $\|f\|_2\leqslant\|(1+x^2)^{-1}\|_2\|(1+x^2)f\|_\infty$, так что

$$\|f\|_{\alpha,\beta,2}\leqslant C(\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}+\|f\|_{\alpha+2,\beta,\infty}).$$

С другой стороны, $f(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f'(t)\,dt$, так что

$$\|f\|_\infty\leqslant\|f'\|_1\leqslant\|(1+x^2)f'\|_2\|(1+x^2)^{-1}f\|_2,$$

и, поскольку $(x^\alpha D^\beta f)'=\alpha x^{\alpha-1}D^\beta f+x^\alpha D^{\beta+1}f$, получаем

$$\|f\|_{\alpha,\beta,\infty}\leqslant C(\alpha\|f\|_{\alpha-1,\beta,2}+\|f\|_{\alpha,\beta+1,2}+\alpha\|f\|_{\alpha+1,\beta,2}+\|f\|_{\alpha+2,\beta+1,2}).\ \blacksquare$$

На втором шаге используются специальные свойства функций Эрмита (собственных функций гармонического осциллятора). Рассмотрим отображения $A\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$ и $A^\dagger\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R})$, определяемые равенствами

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x + \frac{d}{dx}\right), \qquad A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{d}{dx}\right),$$

и $N = A^\dagger A$. Тогда $\|f\|_n \equiv \|(N+1)^n f\|_2$ — полунорма на $\mathscr{S}$.

***Лемма 2.*** Полунормы $\{\|\cdot\|_n\}$ образуют на $\mathscr{S}$ направленное семейство, эквивалентное семейству полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,2}\}$.

*Доказательство.* Достаточно воспользоваться неравенством $\|A_1^\# \ldots A_m^\# f\|_2 \leqslant \|(N+m)^{m/2} f\|_2$, где $A^\#$ означает либо $A$, либо $A^\dagger$. Детали мы оставляем читателю (задача 36). ∎

Рассмотрим теперь функцию $\phi_0$, определенную требованиями $A\phi_0 = 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{\infty} (\phi_0)^2 dx = 1$, т. е. $\phi_0(x) = \pi^{-1/4} e^{-x^2/2}$, и пусть

$$\phi_n = (n!)^{-1/2} (A^\dagger)^n \phi_0 = (2^n n!)^{-1/2} (-1)^n \pi^{-1/4} e^{x^2/2} \left(\frac{d}{dx}\right)^n e^{-x^2}.$$

Функции $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ называются **функциями Эрмита**, или волновыми функциями гармонического осциллятора, поскольку

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2\right)\phi_n = (2n+1)\phi_n.$$

Имеет место такая

***Лемма 3.*** Множество $\{\phi_n\}_{n=0}^\infty$ образует ортонормированный базис в $L^2(\mathbb{R})$.

*Доказательство.* См. задачи 40 или 41 гл. IX или задачу 20 гл. XIII. ∎

Отметим, что $N\phi_n = n\phi_n$. Предположим теперь, что $f \in \mathscr{S}$, и рассмотрим $L^2$-сходящееся разложение $f = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n \phi_n$, где $a_n = (\phi_n, f) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \overline{\phi_n(x)} f(x)\, dx$. Поскольку $N^m\colon \mathscr{S} \to \mathscr{S}$, функция $N^m f$ лежит в $\mathscr{S}$ и, следовательно, в $L^2$. Но $N^m f = \sum\limits_{n=0}^\infty a_n n^m \phi_n$, так что $\sum\limits_{n=0}^\infty |a_n|^2 n^{2m} < \infty$. В частности, $\sup\limits_n |a_n| n^m < \infty$. Таким образом доказана первая часть следующей теоремы:

***Теорема V.13*** (теорема об $N$-представлении для $\mathscr{S}$). Пусть $s_k$ — множество мультипоследовательностей $\{a_\alpha\}_{\alpha \in I_+^k}$, таких, что

$$\sup_{\alpha \in I_+^k} |a_\alpha| \, |\alpha|^m < \infty$$

для каждого $m$. Введем топологию на $s_k$ при помощи полунорм

$$\| \{a_\alpha\} \|_\beta^2 = \sum_\alpha (\alpha+1)^{2\beta} |a_\alpha|^2,$$

где $\beta \in I_+^k$ и $(\alpha+1)^{2\beta} = \prod_{i=1}^k (\alpha_i+1)^{2\beta_i}$. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^k)$. Тогда последовательность $\{a_\alpha = (\phi_\alpha, f)\}$, где $\phi_\alpha(x) = \prod_{i=1}^k \phi_{\alpha_i}(x_i)$, лежит в $s_k$ и отображение $f \mapsto \{a_\alpha\}$ — топологический изоморфизм. **Разложение Эрмита** $f = \sum_\alpha a_\alpha \phi_\alpha$ сходится в $\mathscr{S}$. Числа $\{a_\alpha\}$ называются **коэффициентами Эрмита.**

*Доказательство.* Рассмотрим случай $k=1$. В силу предшествующего обсуждения, если $f \in \mathscr{S}$ и $a_n = (\phi_n, f)$, то $\{a_n\} \in s$. Сверх того, в обозначениях леммы 2, $\| \{a_n\} \|_m = \| f \|_m$. Поскольку $\| \cdot \|_m$ — нормы на $\mathscr{S}$, отображение $f \mapsto \{a_n\}$ инъективно. Пусть теперь $\{a_n\}_{n=0}^\infty \in s$, и пусть $f_N = \sum_{n=0}^N a_n \phi_n$. Простое вычисление показывает, что

$$\| f_N - f_M \|_m^2 = \sum_{n=N+1}^M |a_n|^2 (n+1)^{2m} \to 0$$

при $N, M \to \infty$. Таким образом, $f_N$ — последовательность Коши для каждой из $\| \cdot \|_m$, а значит, последовательность Коши в $\mathscr{S}$ (в силу лемм 1 и 2). Но $\mathscr{S}$ полно, поэтому $f_N \to f$ для некоторой $f \in \mathscr{S}$. Но тогда $f_N \to f$ в $L^2$, так что $(\phi_n, f) = a_n$. В итоге образ $\mathscr{S}$ при нашем отображении $\mathscr{S} \to s$ есть все $s$. Эквивалентность топологий следует из равенства норм $\| \cdot \|_m$ на $\mathscr{S}$ и на $s$. ∎

Теперь с пространством последовательностей можно отождествить и $\mathscr{S}'$.

***Теорема V.14*** (теорема об $N$-представлении для $\mathscr{S}'$). Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^k)$ и $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ для каждого $\alpha \in I_+^k$. Тогда $|b_\alpha| \leqslant C(\alpha+1)^\beta$ для некоторого $\beta \in I_+^k$ и всех $\alpha$. Обратно, если $|b_\alpha| \leqslant C(\alpha+1)^\beta$ для всех $\alpha$, то существует единственное $T \in \mathscr{S}'$, такое, что $T(\phi_\alpha) = b_\alpha$. Если $T \in \mathscr{S}'$ и $b_\alpha = T(\phi_\alpha)$ — его **коэффициенты Эрмита,** то $\sum_\alpha b_\alpha \phi_\alpha$ сходится в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ к $T$.

*Доказательство.* Опять мы рассмотрим только случай $k=1$. Пусть $T\in\mathcal{S}'$. Тогда $|T(\phi)|\leqslant C\|\phi\|_m$ для некоторых $m$ и $C$, поскольку $\{\|\cdot\|_m\}$—направленное множество. Так как $\|\phi_n\|_m=(n+1)^m$, то $|b_n|\leqslant C(n+1)^m$. Обратно, предположим, что $|b_n|\leqslant C(n+1)^m$. Для $\{a_n\}\in s$ определим $B(\{a_n\})=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n a_n$. Тогда

$$
\begin{aligned}
|B(\{a_n\})| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty}|b_n||a_n|\leqslant C\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^m|a_n|\leqslant \\
&\leqslant C\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{2m+2}|a_n|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)^{-2}\right)^{1/2}\leqslant \\
&\leqslant \frac{\pi^2}{6}C\|\{a_n\}\|_{m+1}.
\end{aligned}
$$

В итоге $B$ определяет непрерывный линейный функционал на $s$. В силу связи между $\mathcal{S}$ и $s$, в $\mathcal{S}'$ существует такое $T$, что $T\left(\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\phi_n\right)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nb_n$; в частности, $T(\phi_n)=b_n$. Слабую сходимость $\sum\limits_{n}b_n\phi_n$ к $T$ установить легко. ▮

Теперь с помощью описанной техники мы в состоянии доказать ряд интересных теорем о свойствах $\mathcal{S}$. В основе доказательств лежат *два* важных упрощения: (1) по сравнению с функциями последовательности удобнее в обращении; (2) два требования на $\mathcal{S}$—убывание на бесконечности и принадлежность классу $C^\infty$, в случае $s$ заменяются *одним* условием убывания.

***Следствие 1.*** $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$ в топологии $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$.

*Доказательство.* Если $b_\alpha=T(\phi_\alpha)$, то сумма $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant N}b_\alpha\phi_\alpha$ принадлежит $\mathcal{S}$ и слабо сходится к $T\in\mathcal{S}'$ при $N\to\infty$. ▮

***Следствие 2.*** $\mathcal{S}$ сепарабельно в топологии Фреше. $\mathcal{S}'$ сепарабельно в топологии $\sigma(\mathcal{S}',\mathcal{S})$ (и в топологии $\tau(\mathcal{S}',\mathcal{S})$, которая вводится в § V.7).

***Следствие 3.*** Справедлива теорема о регулярности распределений—теорема V.10.

*Доказательство.* Опять-таки рассмотрим только случай $k=1$. Поскольку $\|f\|_\infty\leqslant C\|(1+x^2)f'\|_2$, то с помощью $A$, $A^\dagger$ и оценок из доказательства леммы 2 можно вывести, что $\|\phi_n\|_\infty\leqslant\leqslant C'(n+1)^{3/2}$. (Более детальное изучение $\phi_n$ показывает, что $\|\phi_n\|_\infty\sim D(n+1)^{-1/12}$.) Пусть $T\in\mathcal{S}'$ и $\{b_n\}$—его коэффициенты Эрмита. Тогда $|b_n|\leqslant E(n+1)^m$ при некотором $m$. Пусть $a_n==(n+1)^{-m-3}b_n$. Тогда $\sum|a_n|\|\phi_n\|_\infty\leqslant E\sum(n+1)^{-3/2}<\infty$ и $\sum a_n\phi_n$

равномерно сходится к некоторой непрерывной функции $F$ на $\mathbb{R}$. Функция $F$ (как элемент $\mathcal{S}'$) имеет коэффициенты Эрмита $\{a_n\}$. Продолжим $A$, $A^\dagger$ и $N=\frac{1}{2}(-d^2/dx^2+x^2-1)$ на $\mathcal{S}'$. Тогда

$$T=(N+1)^{m+3}F=\frac{1}{2^{m+3}}\left(-\frac{d^2}{dx^2}+x^2+1\right)^{m+3}F.$$

Поэтому $T$ можно записать как сумму полиномов, умноженных на слабые производные от полиномиально ограниченных непрерывных функций. Простые рассуждения (задача 37) позволяют завершить доказательство. ∎

*Следствие 4* (теорема о ядре). Каждый непрерывный билинейный функционал $B(\cdot,\ \cdot)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид $B(f,\ g)=$ $=T(f\otimes g)$ с некоторым $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

*Доказательство.* Поскольку $B$ непрерывен, $|B(f,\ g)|\leqslant C\|f\|_r\|g\|_s$ для некоторых $r\in I_+^n$, $s\in I_+^m$. Отсюда

$$|B(\phi_\alpha,\phi_\beta)|\leqslant C(\alpha+1)^r(\beta+1)^s=C[\langle\alpha,\ \beta\rangle+1]^{\langle r,\ s\rangle},$$

где

$$\langle\alpha,\ \beta\rangle=\langle\alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \beta_1,\ \ldots,\ \beta_m\rangle\in I_+^{n+m}.$$

В результате $b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}\equiv B(\phi_\alpha,\ \phi_\beta)$ — коэффициенты Эрмита распределения $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, такого, что $T(\phi_{\langle\alpha,\ \beta\rangle})\equiv T(\phi_\alpha\otimes\phi_\beta)=b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}$. Пусть $f=\sum a_\alpha\phi_\alpha$, $g=\sum c_\beta\phi_\beta$. Так как эти разложения сходятся в $\mathcal{S}$, то

$$T(f\otimes g)=\sum_{\alpha,\ \beta}a_\alpha c_\beta T(\phi_\alpha\otimes\phi_\beta)=\sum_{\alpha,\ \beta}a_\alpha c_\beta b_{\langle\alpha,\ \beta\rangle}=B(f,\ g).\ ∎$$

## V.4. Индуктивные пределы: обобщенные функции и слабые решения дифференциальных уравнений в частных производных

В интуитивном смысле ясно, что распределения, рассмотренные в предыдущем разделе, характеризуются тем, что они полиномиально ограничены на бесконечности. Более точно об этом говорится в теореме V.10, которая гласит, что любое $T\in\mathcal{S}'$ является производной от полиномиально ограниченной функции. Рост распределения $T\in\mathcal{S}'$ в некотором смысле противоположен степени убывания функций $f\in\mathcal{S}$. Это наводит на мысль построить обобщенные функции, не имеющие ограничений на рост в бесконечности, определив их как элементы пространства, сопряженного к пространству функций с очень резким убыванием на бесконечности, т. е. равных нулю вне компактного множества. Иными словами, мы хотим топологизировать множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем так,