равномерно сходится к некоторой непрерывной функции F на $\mathbb{R}$. Функция F (как элемент $\mathcal{S}'$) имеет коэффициенты Эрмита $\{a_n\}$. Продолжим A, $A^\dagger$ и $N = \frac{1}{2}(-d^2/dx^2 + x^2 - 1)$ на $\mathcal{S}'$. Тогда

$$T = (N+1)^{m+3} F = \frac{1}{2^{m+3}} \left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1 \right)^{m+3} F.$$

Поэтому T можно записать как сумму полиномов, умноженных на слабые производные от полиномиально ограниченных непрерывных функций. Простые рассуждения (задача 37) позволяют завершить доказательство. ∎

Следствие 4 (теорема о ядре). Каждый непрерывный билинейный функционал $B(\cdot, \cdot)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ имеет вид $B(f, g) = T(f \otimes g)$ с некоторым $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$.

Доказательство. Поскольку B непрерывен, $|B(f, g)| \leqslant C \|f\|_r \|g\|_s$ для некоторых $r \in I_+^n$, $s \in I_+^m$. Отсюда

$$|B(\phi_\alpha, \phi_\beta)| \leqslant C(\alpha+1)^r (\beta+1)^s = C[\langle \alpha, \beta \rangle + 1]^{\langle r, s \rangle},$$

где

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m \rangle \in I_+^{n+m}.$$

В результате $b_{\langle \alpha, \beta \rangle} \equiv B(\phi_\alpha, \phi_\beta)$ — коэффициенты Эрмита распределения $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n+m})$, такого, что $T(\phi_{\langle \alpha, \beta \rangle}) \equiv T(\phi_\alpha \otimes \phi_\beta) = b_{\langle \alpha, \beta \rangle}$. Пусть $f = \sum a_\alpha \phi_\alpha$, $g = \sum c_\beta \phi_\beta$. Так как эти разложения сходятся в $\mathcal{S}$, то

$$T(f \otimes g) = \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha c_\beta T(\phi_\alpha \otimes \phi_\beta) = \sum_{\alpha, \beta} a_\alpha c_\beta b_{\langle \alpha, \beta \rangle} = B(f, g). \ ∎$$

V.4. Индуктивные пределы: обобщенные функции и слабые решения дифференциальных уравнений в частных производных

В интуитивном смысле ясно, что распределения, рассмотренные в предыдущем разделе, характеризуются тем, что они полиномиально ограничены на бесконечности. Более точно об этом говорится в теореме V.10, которая гласит, что любое $T \in \mathcal{S}'$ является производной от полиномиально ограниченной функции. Рост распределения $T \in \mathcal{S}'$ в некотором смысле противоположен степени убывания функций $f \in \mathcal{S}$. Это наводит на мысль построить обобщенные функции, не имеющие ограничений на рост в бесконечности, определив их как элементы пространства, сопряженного к пространству функций с очень резким убыванием на бесконечности, т. е. равных нулю вне компактного множества. Иными словами, мы хотим топологизировать множество $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем так, чтобы оно стало полным локально выпуклым пространством. Если K—компактное множество в $\mathbb{R}^n$, множество $C_0^\infty(K)$ функций класса C^∞ с носителем в K обладает естественной топологией, задаваемой нормами $\|f\|_{\alpha,\infty} \equiv \sup_{\mathbb{R}^n} |D^\alpha f|$. Однако при наделении $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ нормами $\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}_{\alpha \in I_+^n}$ оно *не становится* полным, несмотря на то что пространства $C_0^\infty(K)$ полны для каждого компактного K (см. задачу 38). Нам хотелось бы считать $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ объединением $\bigcup_m C_0^\infty(K_m)$, где $\{K_m\}_{m=1}^\infty$—некоторое семейство компактных множеств, такое, что $\bigcup_m K_m = \mathbb{R}^n$, и наделить его некоторой «предельной» топологией. Для того чтобы сделать это, опишем одну общую конструкцию.

Теорема V.15. Пусть X—комплексное (или вещественное) векторное пространство. Пусть X_n—семейство подпространств со свойствами $X_n \subseteq X_{n+1}$, $X = \bigcup_{n=1}^\infty X_n$. Предположнм, что каждое X_n обладает локально выпуклой топологией, такой, что ее сужение из X_{n+1} на X_n совпадает с заданной топологией на X_n. Пусть $\mathcal{U}$—совокупность уравновешенных поглощающих выпуклых множеств $\mathfrak{G}$ в X, таких, что $\mathfrak{G} \cap X_n$ открыто в X_n для каждого n. Тогда:

(a) $\mathcal{U}$ есть база окрестностей нуля некоторой локально выпуклой топологии;

(b) топология, порождаемая совокупностью $\mathcal{U}$,—сильнейшая локально выпуклая топология на X, в которой непрерывны вложения $X_n \to X$;

(c) сужение топологии из X на каждое X_n совпадает с заданной топологией на X_n;

(d) если каждое X_n полно, то полно и X.

Для доказательства теоремы V.15 нам нужна одна техническая

Лемма. Пусть X—локально выпуклое пространство, и пусть X_1—подпространство с относительной топологией, которая автоматически локально выпукла. Пусть V—открытое выпуклое уравновешенное подмножество в X_1. Тогда в X существует открытое выпуклое уравновешенное подмножество Z, такое, что $Z \cap X_1 = V$.

Доказательство. Поскольку на X_1 задана относительная топология, в X можно найти такое открытое множество $\mathfrak{G}$, что $\mathfrak{G} \cap X_1 = V$. Так как $\mathfrak{G}$—окрестность нуля в X и X локально компактно, можно найти уравновешенное выпуклое $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$, открытое в X. Пусть

$$Z = \{\alpha x + \beta y \mid x \in \mathfrak{G}_1,\ y \in V,\ |\alpha| + |\beta| = 1\} = \\ = \bigcup_{y \in V,\ |\alpha| + |\beta| = 1} (\beta y + |\alpha| \mathfrak{G}_1).$$

Будучи объединением открытых множеств, Z открыто. Поскольку $V \subset Z$, имеем $V \subset (Z \cap X_1)$, но если $\alpha x + \beta y \in X_1 \cap Z$, то $x \in X_1 \cap \mathcal{O}_1 \subset X_1 \cap \mathcal{O} = V$, так что $\alpha x + \beta y \in V$, т. е. $Z \cap X_1 \subset V$. Это и доказывает лемму. ∎

Доказательство теоремы V.15. Семейство $\mathcal{U}$ замкнуто относительно конечных пересечений и растяжений, поэтому для доказательства (а) нужно только показать, что порождаемая им топология хаусдорфова. Но если мы докажем утверждение (с), то из него будет следовать хаусдорфовость X, ибо если точка $x \in X_n$ задана, то можно найти содержащее нуль открытое в X_n множество $\mathcal{O}$, не содержащее x, а тогда, при условии что (с) доказано, можно найти такое открытое в X множество U, что $U \cap X_n = \mathcal{O}$. Таким образом, из (с) следует (а). По заданной окрестности $\mathcal{O}_1$ нуля в X_n найдем уравновешенное выпуклое открытое множество $N_n \subset \mathcal{O}_1$. Затем, пользуясь леммой, найдем выпуклое уравновешенное и открытое в X_{n+1} подмножество $N_{n+1} \subset X_{n+1}$, такое, что $N_{n+1} \cap X_n = N_n$, и далее по индукции — такие множества N_k $(k > n)$, что N_k выпуклы, уравновешены, открыты в X_k и $N_k \cap X_{k-1} = N_{k-1}$. Положим $N_\infty = \bigcup\limits_{k \geqslant n} N_k$. Легко видеть, что $N_\infty \in \mathcal{U}$ и $N_\infty \cap X_k \subset \mathcal{O}_1$. Таким образом, $\mathcal{O}_1$ — окрестность в относительной топологии. То что относительная топология сильнее, чем заданная, следует из определения $\mathcal{U}$. Это доказывает (с), а следовательно, и (а). Нетрудно доказать (b). Относительно (d) см. ссылки в Замечаниях. ∎

Определение. Локально выпуклое пространство X, построенное в теореме V.15, называется **строгим индуктивным пределом** пространств X_n.

Заметим, что если каждое X_n есть собственное замкнутое подпространство в X_{n+1}, то пространство X неметризуемо (задача 45). Одно из приятных свойств строгого индуктивного предела отражено в следующей теореме:

Теорема V.16. Пусть X — строгий индуктивный предел локально выпуклых пространств $\{X_n\}_{n=1}^\infty$. Линейное отображение T из X в локально выпуклое пространство Y непрерывно тогда и только тогда, когда непрерывно каждое из сужений $T \restriction X_n$.

Доказательство. Если T непрерывно, то и каждое сужение непрерывно. Обратно, предположим, что каждое сужение непрерывно. Пусть N — уравновешенное выпуклое открытое множество в Y. Тогда $T^{-1}[N] \cap X_n = (T \restriction X_n)^{-1}[N]$ открыто в X_n, поскольку $T \restriction X_n$ непрерывно. Так как $T^{-1}[N]$ уравновешено и выпукло, оно открыто, и потому T непрерывно. ∎

Пример 1. Пусть $\varkappa(\mathbb{R})$—множество непрерывных функций на $\mathbb{R}$, имеющих компактный носитель. Пусть $\varkappa_n$—множество функций из $\varkappa(\mathbb{R})$ с носителем в $[-n, n]$, нормированное при помощи $\|\cdot\|_\infty$. Снабдим $\varkappa$ топологией индуктивного предела. В силу последней теоремы, сопряженное к $\varkappa$ в этой топологии образует в точности множество комплексных мер Бэра на $\mathbb{R}$. Такая же конструкция возможна и в случае $\varkappa(X)$, когда X—любое σ-компактное локально компактное пространство.

Пусть теперь Ω—открытое связное множество в $\mathbb{R}^n$, а $C_0^\infty(\Omega)$—множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. Пусть K_n—возрастающее семейство компактных множеств, такое, что $\bigcup_n K_n=\Omega$. Зададим на $C_0^\infty(K_n)$ топологию Фреше, порождаемую нормами $\|D^\alpha f\|_\infty$. Обозначим множество $C_0^\infty(\Omega)$ с топологией индуктивного предела, получаемой с помощью $\bigcup_n C_0^\infty(K_n)$, через $\mathcal{D}_\Omega$. Эта топология не зависит от выбора K_n (задача 46). В $\mathcal{D}_\Omega$ довольно просто ввести *секвенциальную* сходимость.

Теорема V.17. Предположим, что $X=\bigcup X_n$ снабжено топологией строгого индуктивного предела и что каждое X_n—замкнутое собственное подпространство в X_{n+1}. *Последовательность* $f_m\in X$ сходится к $f\in X$ тогда и только тогда, когда все f_m лежат в некотором X_n и $f_m\to f$ в топологии этого X_n. В частности, *последовательность* $f_m\in\mathcal{D}_{\mathbb{R}^n}$ сходится к f тогда и только тогда, когда все f_m и f имеют носитель внутри некоторого фиксированного компакта K и $D^\alpha f_m$ равномерно сходится к $D^\alpha f$ для каждого мультииндекса α.

Доказательство. Пусть $f_m\to f$, и пусть для каждого n существует $f_m\notin X_n$. Тогда легко построить подпоследовательность из f_m, скажем $g_i=f_{m(i)}$, и подпоследовательность из X_n, скажем $Y_i=X_{n(i)}$, такие, что $g_i\in Y_{i+1}\setminus Y_i$. Так как Y_i замкнуты, то в силу теоремы Хана—Банаха найдутся такие $l_i\in X^*$, что $l_i\equiv 0$ на Y_i и $l_n(g_n)=n-\sum_{k=1}^{n-1} l_k(g_n)$. Пусть $l=\sum_{n=1}^{\infty} l_n$. На любом X_n эта сумма конечна, следовательно, функционал l на каждом X_n непрерывен, а потому, в силу теоремы V.16, он непрерывен на X. Поскольку $g_m\to f$ и $l\in X^*$, $l(g_m)$ сходится. Но $l(g_m)=m$, и полученное противоречие доказывает, что все f_m лежат в некотором X_n. ∎

Теперь у нас есть все, чтобы определить обобщенные функции на Ω.

Определение. **Обобщенная функция** (или **распределение**)—это непрерывный линейный функционал на $\mathcal{D}_\Omega$. Пространство всех непрерывных линейных функционалов на $\mathscr{D}_\Omega$ обозначается через $\mathscr{D}'_\Omega$. Символы $\mathscr{D}$ и $\mathscr{D}'$ будут обозначать соответственно $\mathscr{D}_{\mathbb{R}^n}$ и $\mathscr{D}'_{\mathbb{R}^n}$.

Теорема V.16 прямо переводится в такое

Следствие. Линейный функционал T на $\mathscr{D}$ непрерывен тогда и только тогда, когда для каждого компакта $K\subset\mathbb{R}^n$ существуют постоянная C и целое число j, такие, что для всех $\varphi\in C_0^\infty(K)$

$$|T(\varphi)|\leqslant C\sum_{|\alpha|<j}\|D^\alpha\varphi\|_\infty.$$

Пример 2. Пусть f — произвольная непрерывная функция на $\mathbb{R}^n$. Определим $D^\alpha f$ равенством

$$(D^\alpha f)(\varphi)=(-1)^{|\alpha|}\int f(x)(D^\alpha\varphi)(x)\,dx.$$

Тогда для каждого компактного множества K и $\varphi\in C_0^\infty(K)$

$$|(D^\alpha f)(\varphi)|\leqslant C\|D^\alpha\varphi\|_\infty\sup_{x\in K}|f(x)|,$$

так что $D^\alpha f\in\mathscr{D}'$. Следовательно, $\mathscr{D}'$ содержит слабые производные всех непрерывных функций.

Пример 3. Рассмотрим $\mathscr{D}$. Пусть $\delta^n(x-a)\colon\mathscr{D}\to\mathbb{C}$ задается равенством $\delta^n(x-a)(f)=D^nf(a)$. Тогда $\sum_{n=0}^{\infty}\delta^n(x-n)=T$ лежит в $\mathscr{D}'$. В самом деле, если $\varphi\in C_0^\infty[-m, m]$, то

$$|T(\varphi)|=\left|\sum_{n=0}^{m}(D^n\varphi)(n)\right|\leqslant\sum_{n=0}^{m}\|D^n\varphi\|_\infty.$$

Этот пример показывает, что $\mathscr{D}'$ содержит обобщенные функции T, которые *не являются* α-й производной никакой непрерывной функции. Поэтому для $\mathscr{D}'$ не существует прямого аналога теоремы V.10, хотя и справедлива локальная теорема регулярности (задача 26). Для $\mathscr{D}$ справедлива также теорема о ядре (см. задачи 59, 60).

В $\mathscr{D}'$ с помощью метода, использованного в § V.3, можно перенести операции, заданные на $\mathscr{D}$. Так, например, если $p(x_1, \ldots, x_n)$ — полином от n переменных степени k, т. е. $p(x_1, \ldots, x_n)=\sum_{|\alpha|\leqslant K}a_\alpha x^\alpha$, то дифференциальный оператор в частных производных $p(D)=\sum_{|\alpha|\leqslant k}a_\alpha D^\alpha$ продолжается на $\mathscr{D}'$ формулой

$$(p(D)T)(\varphi)=T\left[\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha\varphi)\right]. \qquad (V.5)$$

Формулу (V.5) можно использовать и в случае, если a_α суть функции от x класса C^∞.

Продолжение дифференциальных операторов в частных производных на $\mathscr{D}'$ особенно полезно для теории дифференциальных уравнений в частных производных. Пусть f — непрерывная функция. Непрерывно дифференцируемую k раз функцию u (мы пишем $u \in C^k$), для которой $p(D)u = f$, назовем **классическим решением**. Если $T \in \mathscr{D}'$ и $p(D)T = f$, где $p(D)T$ определено формулой (V.5), то T назовем **слабым решением** дифференциального уравнения в частных производных. Различие между классическими и слабыми решениями заключено только в их гладкости, ибо справедливо такое

Предложение. Если $u \in C^k$, то $p(D)u$, определенное формулой (V.5), совпадает с классическим значением $p(D)u$. В частности, если $u \in C^k$ и f — непрерывная функция, то u является слабым решением уравнения $p(D)u = f$ тогда и только тогда, когда u есть классическое решение.

Доказательство проводится элементарным интегрированием по частям. ▌

Следующий пример показывает, что не каждое слабое решение является классическим.

Пример. Пусть $f(x)$ — характеристическая функция отрезка $[0, 1]$. Покажем, что $u(x, t) = f(x-ct)$ — слабое решение уравнения $u_{tt} - c^2 u_{xx} = 0$. При этом, вместо того чтобы прямо использовать определение (V.5) (что может служить полезным упражнением), воспользуемся тем фактом, что оператор $p(D)$ в (V.5) непрерывен на $\mathscr{D}'$. Поскольку $f \in L^1(\mathbb{R})$, в $\mathscr{D}$ можно найти последовательность f_n, сходящуюся в $L^1(\mathbb{R})$ к f. Тогда легко видеть, что $u_n(x, t) = f_n(x-ct) \to u(x, t)$ в топологии $\sigma(\mathscr{D}', \mathscr{D})$. Но $p(D)u_n$ можно вычислить в классическом смысле, т. е.

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n(x, t) = c^2 f_n''(x-ct), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n(x, t) = f_n''(x-ct),$$

так что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} u_n - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u_n = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} u - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} u = 0.$$

В задаче 47 мы обсудим распределения, зависящие только от $x-ct$, и докажем, что любое такое распределение T удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T = 0.$$

Концепция слабых решений полезна, в частности, тем, что часто легко доказать существование именно слабого решения (случай уравнений с постоянными коэффициентами см. § IX.5). В случае эллиптических уравнений (см. § IX.6) можно доказать теорему регулярности, которая утверждает, что при определенных условиях каждое слабое решение есть решение классическое. Сочетание двух этих техник позволяет делать выводы о существовании сильных решений у эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотренный выше пример показывает, что в случае гиперболических уравнений дело обстоит не так просто.

V.5. Теоремы о неподвижной точке

В связи с большим разнообразием приложений **мы хотим** рассмотреть решения уравнений вида $x = Tx$. Например, неоднородное интегральное уравнение $f(x) = g(x) + \int K(x, y) f(y)\, dy$ имеет вид $f = Tf$ с аффинным линейным отображением $Tf = g + Kf$. Известные уравнения «бутстрапа», предложенные в физике элементарных частиц, имеют вид $S = T(S)$, где S есть S-матрица, а T — некоторый очень сложный оператор. Условие лоренц-инвариантности вакуумных средних имеет вид

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = W_n(\Lambda x_1, \ldots, \Lambda x_n),$$

где Λ — фиксированное преобразование Лоренца.

Здесь мы хотим обсудить разновидности теорем существования для таких уравнений — так называемые теоремы о неподвижной точке, а в § V.6 — некоторые приложения. Мы делаем это именно здесь по той причине, что некоторые из этих теорем наиболее естественно формулируются на языке локально выпуклых пространств. Сначала рассмотрим «нелинейные» теоремы, т. е. теоремы, в которых не предполагается линейность отображения T, а затем — одну простую теорему, использующую линейность.

Определение. Пусть $T: X \to X$ — некоторое отображение. Точка $x \in X$, для которой $Tx = x$, называется **неподвижной точкой** отображения T.

Первая нелинейная теорема очень проста и, скорее всего, знакома читателю.

Определение. Пусть $\langle S, \rho \rangle$ — метрическое пространство. Отображение $T: S \to S$, для которого $\rho(Tx, Ty) \leqslant \rho(x, y)$, называется **сжимающим**. Если существует $K < 1$, при котором $\rho(Tx, Ty) \leqslant K\rho(x, y)$, то T называется **строго сжимающим**.