(случай уравнений с постоянными коэффициентами см. § IX.5). В случае эллиптических уравнений (см. § IX.6) можно доказать теорему регулярности, которая утверждает, что при определенных условиях каждое слабое решение есть решение классическое. Сочетание двух этих техник позволяет делать выводы о существовании сильных решений у эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Рассмотренный выше пример показывает, что в случае гиперболических уравнений дело обстоит не так просто.

V.5. Теоремы о неподвижной точке

В связи с большим разнообразием приложений мы хотим рассмотреть решения уравнений вида $x = Tx$. Например, неоднородное интегральное уравнение $f(x) = g(x) + \int K(x, y) f(y)\, dy$ имеет вид $f = Tf$ с аффинным линейным отображением $Tf = g + Kf$. Известные уравнения «бутстрапа», предложенные в физике элементарных частиц, имеют вид $S = T(S)$, где S есть S-матрица, а T — некоторый очень сложный оператор. Условие лоренц-инвариантности вакуумных средних имеет вид

$$W_n(x_1, \ldots, x_n) = W_n(\Lambda x_1, \ldots, \Lambda x_n),$$

где Λ — фиксированное преобразование Лоренца.

Здесь мы хотим обсудить разновидности теорем существования для таких уравнений — так называемые теоремы о неподвижной точке, а в § V.6 — некоторые приложения. Мы делаем это именно здесь по той причине, что некоторые из этих теорем наиболее естественно формулируются на языке локально выпуклых пространств. Сначала рассмотрим «нелинейные» теоремы, т. е. теоремы, в которых не предполагается линейность отображения T, а затем — одну простую теорему, использующую линейность.

Определение. Пусть $T\colon X \to X$ — некоторое отображение. Точка $x \in X$, для которой $Tx = x$, называется **неподвижной точкой** отображения T.

Первая нелинейная теорема очень проста и, скорее всего, знакома читателю.

Определение. Пусть $\langle S, \rho\rangle$ — метрическое пространство. Отображение $T\colon S \to S$, для которого $\rho(Tx, Ty) \leqslant \rho(x, y)$, называется **сжимающим**. Если существует $K < 1$, при котором $\rho(Tx, Ty) \leqslant K\rho(x, y)$, то T называется **строго сжимающим**.

Теорема V.18 (принцип сжимающих отображений). Строго сжимающее отображение полного метрического пространства имеет единственную неподвижную точку.

Доказательство. Прежде всего докажем единственность. Если $Tx=x$, $Ty=y$, то $\rho(Tx, Ty)=\rho(x, y)\leqslant K\rho(x, y)$; поскольку $K<1$ и $\rho(x, y)\geqslant 0$, заключаем, что $\rho(x, y)=0$, т. е. $x=y$. Для доказательства существования заметим сначала, что T автоматически непрерывно, ибо если $\rho(x, y)<K^{-1}\varepsilon$, то $\rho(Tx, Ty)<\varepsilon$. Далее, пусть x_0 произвольно, и пусть $T^n x_0=x_n$. Покажем, что $\{x_n\}$ — последовательность Коши. Имеем

$$\rho(x_n, x_{n+1})=\rho(Tx_{n-1}, Tx_{n-2})\leqslant K\rho(x_{n-1}, x_{n-2})\leqslant$$
$$\leqslant K^2\rho(x_{n-2}, x_{n-2})\leqslant\ldots\leqslant K^{n-1}\rho(x_1, x_0).$$

Таким образом, если $n>m$, то при $m\to\infty$

$$\rho(x_n, x_m)\leqslant\sum_{j=m+1}^{n}\rho(x_j, x_{j-1})\leqslant K^m(1-K)^{-1}\rho(x_0, x_1)\to 0.$$

Итак, $\{x_n\}$ — последовательность Коши, значит, $x_n\to x$ для некоторого x. Поскольку T непрерывно, $Tx=\lim Tx_n=\lim x_{n+1}=x$, что и доказывает теорему. ∎

Доказательство второй теоремы значительно сложнее, и мы не намерены приводить его здесь (см. Замечания); она обобщает известную теорему Брауэра о неподвижной точке: всякое непрерывное отображение замкнутого единичного шара из $\mathbb{R}^n$ в себя имеет хотя бы одну неподвижную точку. Уже сама эта теорема достаточно глубока.

Теорема V.19 (теорема Лере—Шаудера—Тихонова). Пусть C — непустое компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Пусть T: $C\to C$ — непрерывное отображение. Тогда T обладает неподвижной точкой.

В качестве подготовки к нашей последней общей теореме о неподвижной точке докажем теорему V.19 в одном частном случае (см. следующую ниже лемму).

Определение. Пусть X и Y — векторные пространства и C — выпуклое подмножество в X. Отображение T: $C\to Y$ называется **аффинным отображением** множества C, если

$$T(tx+(1-t)y)=tTx+(1-t)Ty$$

для всех $x, y\in C$ и всех $0\leqslant t\leqslant 1$.

В отличие от линейных функционалов, заданных на подпространстве, непрерывные аффинные функционалы на выпуклых множествах могут не иметь продолжения на все X (задача 49).

Лемма. Пусть T — непрерывное аффинное отображение C в себя, где C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Тогда T обладает неподвижной точкой.

Доказательство. Положим

$$x_n = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} T^i x_0,$$

где x_0 взято из C. Поскольку C выпукло, $x_n \in C$ при всех n. Далее, C компактно, и потому некоторая поднаправленность $x_{n(\alpha)}$ сходится к пределу x. Мы хотим показать, что $Tx = x$. В силу теоремы Хана — Банаха достаточно показать, что $l(Tx) = l(x)$ для любого $l \in X^*$. Так как C компактно, то $\sup\limits_{x \in C} |l(x)| = M_l < \infty$ для любого фиксированного l. В итоге

$$|l(Tx_n - x_n)| = \left| l\left(\frac{1}{n} T^n x_0 - \frac{1}{n} x_0\right)\right| \leqslant \frac{2}{n} M_l \longrightarrow 0$$

при $n \longrightarrow \infty$, так что $l(Tx - x) = \lim\limits_{\alpha} l(Tx_{n(\alpha)} - x_{n(\alpha)}) = 0$. ∎

Последняя из рассматриваемых теорем о неподвижной точке имеет дело с целым семейством отображений.

Определение. Говорят, что семейство $\mathcal{F}$ отображений некоторого множества X в себя обладает **общей неподвижной точкой**, если существует такое $x \in X$, что $Tx = x$ для всех $T \in \mathcal{F}$.

Теорема V.20 (теорема Маркова — Какутани). Пусть $\mathcal{F}$ — семейство *коммутирующих* непрерывных аффинных отображений C в себя, где C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства, т. е. $TSx = STx$ для всех $S, T \in \mathcal{F}$ и $x \in C$. Тогда $\mathcal{F}$ имеет общую неподвижную точку.

Доказательство. Для каждого конечного подмножества $F \subset \mathcal{F}$ положим $f_F = \{x \in C \mid Tx = x$ для всех $T \in F\}$. Так как все T непрерывны, то каждое f_F замкнуто и, кроме того, $f_{F_1} \cap f_{F_2} = f_{F_1 \cup F_2}$. Таким образом, если показать, что каждое f_F непусто, то $\bigcap f_F \neq \varnothing$ в силу критерия центрированности, и, следовательно, найдется x со свойством $Tx = x$ для всех $T \in \mathcal{F}$. Поскольку $T \in \mathcal{F}$ аффинны и линейны, каждое f_F выпукло. Условие $x \in f_F$ влечет за собой $Sx \in f_F$ для каждого $S \in \mathcal{F}$, ибо если $T \in F$, то $T(Sx) = S(Tx) = Sx$, когда $Tx = x$. Так как f_F выпукло и компактно и $S\colon f_F \longrightarrow f_F$, в f_F существует x со свойством $Sx = x$, т. е. $f_{F \cup \{S\}} \neq \varnothing$, если $f_F \neq \varnothing$. По индукции получаем, что каждое f_F непусто и, следовательно, $\bigcap\limits_F f_F \neq \varnothing$. Отсюда, как уже отмечено выше, вытекает наличие у $\mathcal{F}$ общей неподвижной точки. ∎

В гл. XVI мы вернемся к специальным свойствам компактных выпуклых подмножеств локально выпуклых пространств; в частности, в § XVI.5 мы распространим теорему V.20 на различные некоммутирующие семейства (см. также задачу 50).

V.6. Приложения теорем о неподвижной точке

А. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть F — непрерывная функция из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Нас интересует решение дифференциального уравнения $\dot{y}\equiv dy/dt=F(t, y)$ с начальными условиями, т. е. по заданному $y_0\in\mathbb{R}^n$ мы хотим найти непрерывно дифференцируемую функцию $y(t)$ на $\mathbb{R}$, такую, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Мы обсудим, как можно применять теоремы § V.5 о неподвижной точке при доказательстве существования *локальных* решений, т. е. как по заданному y_0 можно найти некоторое δ и функцию $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$, такие, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ при всех $|t|<\delta$. Отметим, что уравнение p-го порядка $y^{(p)}=F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(p-1)})$ на $\mathbb{R}^k$ сводится к уравнению первого порядка на $\mathbb{R}^{kp}$ с помощью перехода к вектор-столбцам:

$$Y=\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}; \qquad \dot{Y}=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ F(t, y_1, \ldots, y_p) \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование делает функции менее гладкими, и обычно его нельзя определить как отображение пространства в себя, если только последнее не состоит из функций класса C^∞. Интегрирование — более гладкая операция, оно переводит множество непрерывных функций на интервале в себя. По этой причине удобно переписать дифференциальное уравнение в интегральной форме:

$$y(t)=y_0+\int_0^t F(s, y(s))\,ds. \tag{V.6}$$

Легко видеть, что непрерывная функция $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$ удовлетворяет (V.6) тогда и только тогда, когда она является локальным решением уравнения $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ с начальным условием $y(0)=y_0$.

Итак, имея y_0 и δ, рассмотрим отображение G: $C[-\delta, \delta]\to C[-\delta, \delta]$, заданное на множестве непрерывных функций из