В гл. XVI мы вернемся к специальным свойствам компактных выпуклых подмножеств локально выпуклых пространств; в частности, в § XVI.5 мы распространим теорему V.20 на различные некоммутирующие семейства (см. также задачу 50).

V.6. Приложения теорем о неподвижной точке

A. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Пусть F — непрерывная функция из $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$. Нас интересует решение дифференциального уравнения $\dot{y}\equiv dy/dt=F(t, y)$ с начальными условиями, т. е. по заданному $y_0\in\mathbb{R}^n$ мы хотим найти непрерывно дифференцируемую функцию $y(t)$ на $\mathbb{R}$, такую, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Мы обсудим, как можно применять теоремы § V.5 о неподвижной точке при доказательстве существования *локальных* решений, т. е. как по заданному y_0 можно найти некоторое δ и функцию $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$, такие, что $y(0)=y_0$ и $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ при всех $|t|<\delta$. Отметим, что уравнение p-го порядка $y^{(p)}=F(t, y, \dot{y}, \ldots, y^{(p-1)})$ на $\mathbb{R}^k$ сводится к уравнению первого порядка на $\mathbb{R}^{kp}$ с помощью перехода к вектор-столбцам:

$$Y=\begin{pmatrix} y \\ \dot{y} \\ \vdots \\ y^{(p-1)} \end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}; \qquad \dot{Y}=\begin{pmatrix} y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ F(t, y_1, \ldots, y_p) \end{pmatrix}.$$

Дифференцирование делает функции менее гладкими, и обычно его нельзя определить как отображение пространства в себя, если только последнее не состоит из функций класса C^∞. Интегрирование — более гладкая операция, оно переводит множество непрерывных функций на интервале в себя. По этой причине удобно переписать дифференциальное уравнение в интегральной форме:

$$y(t)=y_0+\int_0^t F(s, y(s))\,ds. \tag{V.6}$$

Легко видеть, что непрерывная функция $y(t)$ на $(-\delta, \delta)$ удовлетворяет (V.6) тогда и только тогда, когда она является локальным решением уравнения $\dot{y}(t)=F(t, y(t))$ с начальным условием $y(0)=y_0$.

Итак, имея y_0 и δ, рассмотрим отображение G: $C[-\delta, \delta]\to$ $\to C[-\delta, \delta]$, заданное на множестве непрерывных функций из

$[-\delta, \delta]$ в $\mathbb{R}^n$ формулой

$$[G(g)](t) = y_0 + \int_0^t F(s, g(s))\,ds.$$

Тогда решить уравнение (V.6) — это то же самое, что найти неподвижную точку для G!

Рассмотрим сначала случай, когда F удовлетворяет условию Липшица, т. е. когда при заданном y_0 существуют такие K, ε и δ, что из $\|y - y_0\| < \varepsilon$, $|t| < \delta$ вытекает $\|F(t, y) - F(t, z)\| \leqslant K\|y - z\|$, если $\|z - y_0\| < \varepsilon$. Здесь $\|\cdot\|$ — евклидова норма на $\mathbb{R}^n$. Уменьшая δ, можно добиться того, чтобы было

$$\delta \max_{\substack{|t| < \delta \\ \|y - y_0\| < \varepsilon}} \|F(t, y)\| < \varepsilon \quad \text{и} \quad \delta K < 1/2.$$

Пусть теперь

$$S = \{g \in C[-\delta, \delta] \mid \|g(t) - y_0\| \leqslant \varepsilon/2 \quad \forall t \in (-\delta, \delta)\};$$

S с нормой $\|\cdot\|_\infty$ есть полное метрическое пространство, и из неравенства $\delta \max\|F(t, y)\| < \varepsilon$ следует, что $G(g) \in S$, если $g \in S$. Когда $\delta K < 1/2$ и $\|F(t, y) - F(t, z)\| \leqslant K\|y - z\|$, имеем $\|G(g_1) - G(g_2)\|_\infty < {}^1/_2\|g_1 - g_2\|_\infty$, если $g_1, g_2 \in S$. Следовательно, G — строго сжимающее отображение на S, и по теореме V.18 существует *единственное* $g \in S$, удовлетворяющее (V.6). Нетрудно понять, что любое решение (V.6) должно обладать свойством $\|g(t) - y_0\| \leqslant \varepsilon/2$ при малых t и потому должно совпадать с этим единственным решением из S, когда t мало. В итоге для рассматриваемого случая локальное существование и единственность доказаны.

Теперь предположим, что F только непрерывна. По заданному y_0 выберем такое δ, чтобы

$$\max_{\substack{|t| < \delta \\ \|y - y_0\| < 1}} |F(t, y)| < \delta^{-1}.$$

Положим

$$C_0 = \{g \in C[-\delta, \delta] \mid \|g(t) - y_0\| \leqslant 1 \ \forall t \in (-\delta, \delta)\}.$$

Тогда $G(g) \in C_0$, если $g_0 \in C_0$. На самом деле можно утверждать больше. Пусть

$$C_1 = \{g \in C_0 \mid \|g(t) - g(s)\| \leqslant |t - s| \max_{\substack{|t| < \delta \\ \|y - y_0\| < 1}} |F(t, y)| \quad \forall t, s \in (-\delta, \delta)\}.$$

Тогда $g \in C_0$ влечет за собой $G(g) \in C_1$. Таким образом, $G\colon C_1 \to C_1$. Отображение G непрерывно, а множество C_1 выпукло и компактно в силу соображений, связанных с равностепенной непрерывностью. Следовательно, по теореме V.19, G обладает неподвижной точкой. ∎

Отметим, что второй метод доказательства дает только существование локального решения, но не его единственность. И в самом деле, когда F непрерывна, но условие Липшица не выполнено, единственность может не иметь места: например, если $F(t, y) = 2\sqrt{y}$, то уравнение $\dot{y} = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$, имеет два решения: $y(t) \equiv 0$ и $y(t) = t^2$, которые различаются в любой окрестности $t = 0$. Компактность C_1 связана с конечномерностью $\mathbb{R}^n$, где компактен единичный шар. Однако свойство сжимаемости для функций, удовлетворяющих условию Липшица, выполнено и без требования компактности, и потому немедленно переносится на обыкновенные дифференциальные уравнения для функций со значениями в банаховом пространстве.

Вопрос о том, когда локальное решение может быть продолжено до глобального, значительно деликатнее.

B. Мера Хаара на коммутативных компактных группах

При помощи теоремы Маркова — Какутани легко построить инвариантную меру на компактной абелевой группе. Пусть G — компактное топологическое пространство, которое в то же время является абелевой группой, и предположим, что все групповые операции непрерывны. Мы хотим построить такую меру $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(G)$, чтобы $\int f\, d\mu = \int f_g\, d\mu$ для всех $g \in G$ и $f \in C(G)$, где f_g — сдвиг функции f, т. е. $f_g(h) = f(h - g)$. Для любой $\mu \in \mathcal{M}_{+,1}(G)$ определим $T_g\mu$ соотношением $T_g\mu(f) = \mu(f_g)$. Тогда T_g отображает $\mathcal{M}_{+,1}(G)$ в себя и непрерывно в грубой ($*$-слабой) топологии. Множество $\mathcal{M}_{+,1}$ выпукло и, в силу теоремы Банаха — Алаоглу, компактно. Различные T_g коммутируют, поскольку G — абелева группа. Кроме того, они аффинны, поэтому, как утверждает теорема V.20, существует общая неподвижная точка μ_{Haar} с нужным свойством инвариантности. В этом случае теорема о неподвижной точке дает только существование; единственность доказывается с помощью аргументов другого сорта.

C. Уравнения «бутстрапа»

Не входя ни в технические, ни в физические детали, опишем применение теоремы Лере — Шаудера — Тихонова в доказательстве самосогласованности некоторых схем бутстрапа.

Для того чтобы описать идею бутстрапа, обратимся к потенциальному рассеянию, где по сравнению с теорией поля существенно меньше различных усложнений. Рассмотрим рассеяние двух частиц одинаковой массы. Поскольку полный импульс $\mathbf{P}$ сохраняется и мы предполагаем, что все силы зависят только от относительных положений частиц, можно описывать рассеяние в системе координат, где $\mathbf{P}=0$ (рис. V.2). Возьмем для простоты

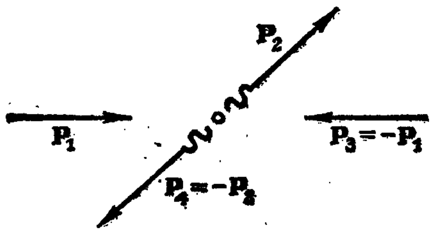

Рис. V.2. Рассеяние при $\mathbf{P}=0$.

$m=1/2$, где m — масса частиц. Естественные переменные в нерелятивистском случае — это энергия $E=P_1^2=P_2^2$ и угол рассеяния θ, но, имея в виду релятивистский случай, возьмем вместо них $s=4E$ и переданный импульс $t=-(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2)^2=2E(\cos\theta-1)$.

В квантовой механике рассеяние представляет собой существенно волновое явление, и потому описывается величиной рассеянной волны и ее фазой относительно падающей волны, т. е. комплексным числом A_{phys} — амплитудой рассеяния, обсуждаемой в § XII.6. Она определена в области $E\geqslant 0$, $-1\leqslant\cos\theta\leqslant 1$, или, что то же самое, $0\leqslant s<\infty$, $-s\leqslant t\leqslant 0$. Как мы увидим в § XII.7, амплитуда $A_{\text{phys}}(s, 0)$ для самых разнообразных потенциалов является граничным значением некоторой функции,

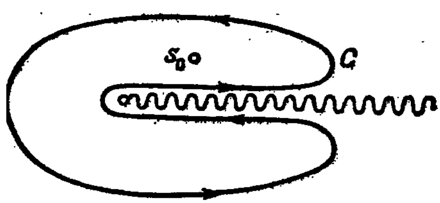

Рис. V.3. Контур C в s-плоскости с разрезом.

аналитической в s-плоскости с разрезом (рис. V.3). В общем случае на отрицательной полуоси могут быть полюса, которые мы для простоты исключаем. Таким образом,

$$A_{\text{phys}}(s, 0)=\lim_{\varepsilon\downarrow 0} A(s+i\varepsilon, 0)\equiv A(s+i0, 0)$$

с некоторой функцией, аналитической в $\{s\in\mathbb{C}\mid \arg s\neq 0\}$. Более того, $A(s, 0)$ вещественна при $s<0$, поэтому, согласно принципу симметрии Шварца, физическая амплитуда обладает свойством

$$\operatorname{Im} A(s+i0, 0)=\frac{1}{2i}[A(s+i0, 0)-A(s-i0, 0)].$$

Предположим, опять-таки для простоты, что $A(s, 0)\to 0$ на бесконечности. В общем случае это неверно, и следующее ниже рассуждение надо подправить с помощью процедуры, известной как процедура вычитаний (§ XII.7). Тогда, в силу интегральной теоремы Коши,

$$A(s_0, 0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{A(s, 0)}{s-s_0}\,ds,$$

где C—контур, изображенный на рис. V.3. Если теперь делать радиус большого круга все больше и больше, вклад от него будет исчезать, ибо мы предположили, что $A(s, 0)\to 0$ при $s\to\infty$. Приближая прямолинейные участки пути к вещественной оси, найдем, что

$$A(s, t_0=0)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{D(s, t_0=0)}{s-s_0}\,ds, \tag{V.7a}$$

где $D(s, t_0=0)=\frac{1}{2i}[A(s+i0, 0)-A(s-i0, 0)]=\operatorname{Im} A(s+i0, 0)$— «скачок» A.

Для узкого класса потенциалов это «дисперсионное соотношение» может быть доказано при $t=t_0$ для всех вещественных положительных t_0. Этот класс включает в себя суммы юкавских потенциалов, которые считаются нерелятивистским аналогом ядерных сил. Более того, в этом случае $D(s_0, t)$ при фиксированном s_0 является граничным значением функции, аналитической в плоскости с разрезом от $t=\sigma(s)$ до ∞. Функция $\sigma(s)$, зависящая от потенциала, известна в явном виде и называется мандельстамовской границей. Можно написать дисперсионное соотношение для D:

$$D(s, t_0)=\frac{1}{\pi}\int_{\sigma(s)}^\infty \frac{\rho(s, t)}{t-t_0}\,dt,$$

где

$$\rho(s, t)=\frac{1}{2i}[D(s, t+i0)-D(s, t-i0)]$$

называется «двойной спектральной функцией».

Собирая два наших дисперсионных соотношения вместе, получаем «мандельстамовское представление» для A:

$$A(s, t)=\frac{1}{\pi^2}\int_0^\infty ds' \int_{\sigma(s')}^\infty dt'\, \frac{\rho(s', t')}{(s'-s)(t'-t)}. \tag{V.7b}$$

Это *линейное* соотношение, в сущности, есть утверждение об аналитических свойствах A.

Второй элемент схемы бутстрапа—«унитарность S-матрицы». Давайте временно вернемся к переменным E, θ и к обозначению $A(E, \theta)$ для амплитуды при $s=4E$ и $t=-2E(1-\cos\theta)$. Унитарность есть отражение того факта, что число частиц, входящих в область рассеяния, равно числу частиц, ее покидающих (более глубокое обсуждение см. в § XII.5). С квантовомеханической точки зрения, уменьшение числа частиц в пучке вызвано интерференцией между рассеянной и нерассеянной волнами. Эта интерференция пропорциональна $\operatorname{Im} A(E, 0)$, тогда как количество частиц, покинувших пучок, пропорционально $|A|^2$. Таким образом приходим к *нелинейному* соотношению

$$\operatorname{Im} A(E, 0)=c\int |A(E, \theta)|^2\, d\Omega,$$

где $c(E)$—функция от E, зависящая от нормировки A, а $d\Omega$—угловая мера на сфере. Можно продолжить это соотношение на ненулевые θ и получить нелинейное интегральное соотношение между $D(s, t)$ и $A(s', t')$ (квадратичное по A). Взяв скачок D и использовав представление Мандельстама, найдем соотношение

$$\rho=T(\rho),$$

где T—некоторая явная, хотя и сложная, функция от ρ. Если ρ обладает свойством $\rho=T(\rho)$ и имеет правильное убывание, достаточное для сходимости некоторых интегралов, то можно показать, что A, определяемая соотношением (V.7b), удовлетворяет условию унитарности. Таким образом, существование $A(s, t)$ с правильными свойствами аналитичности и унитарности эквивалентно существованию неподвижных точек у T. В нерелятивистском случае существование таких ρ известно, поскольку можно показать, что амплитуда рассеяния для суперпозиции юкавских потенциалов обладает правильными свойствами аналитичности и унитарности.

В релятивистском случае, например при $\pi^0\pi^0$-рассеянии, возникают два дополнительных усложнения:

(i) *Кроссинг-симметрия*. Заменим импульсы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$ на рис. V.1 на 4-векторы энергии-импульса $p_i=\langle\sqrt{\mu^2+\mathbf{p}_i^2}, \mathbf{p}_i\rangle$, где μ—масса пионов. Имея 4-вектор $a=\langle a_0, \mathbf{a}\rangle$, определим $a^2=a_0^2-\mathbf{a}^2$; например, $p_i^2=\mu^2$, что выражает релятивистское соотношение между энергией и импульсом. Определим далее мандельстамовские переменные $s=(p_1+p_2)^2=4(p^2+\mu^2)$, если p—импульс в системе центра масс, $t=(p_1-p_2)^2={}^1/_2(s-4\mu^2)(\cos\theta-1)$ и $u=(p_1-p_4)^2={}^1/_2(s-4\mu^2)(-\cos\theta-1)$. Конечно, s, t и u зависимы, ибо $s+t+u=4\mu^2$. Кроссинг-симметрия выражает глубокий факт релятивистской квантовой теории, а именно то, что аналитическое продолжение амплитуды, скажем, процесса рассеяния $\pi^0\pi^0 \to \pi^0\pi^0$, является симметричной функцией s и t, а после замены переменных $\langle s, t\rangle \to \langle s, u\rangle$, сделанной с помощью соотношения $u = 4\mu^2 - s - t$, — симметричной функцией s и u. Это автоматически ведет к существованию дополнительных разрезов в области определения функции $A(s, t)$. Например, аналогом разреза от $E=0$ до $E=\infty$ в области определения нерелятивистской амплитуды является разрез для $A(s, 0)$, идущий от $s=4\mu^2$ до $s=\infty$. Кроссинг-симметрия предполагает, что должен быть еще разрез от $u=4\mu^2$ до $u=\infty$, или, так как $t=0$, от $s=0$ до $s=-\infty$. Аналог нерелятивистской мандельстамовской аналитичности тогда выражается релятивистским мандельстамовским соотношением:

$$A(s_0, t_0) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{4\mu^2}^{\infty} ds \int\limits_{\sigma(s)}^{\infty} dt\,\rho(s, t)\left[\frac{1}{(s-s_0)(t-t_0)} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(s-s_0)(t+s_0+t_0-4\mu^2)} + \frac{1}{(s+s_0+t_0-4\mu^2)(t-t_0)}\right].$$

В этой формуле

$$\sigma(s) = \min\left\{\frac{4s}{s-16\mu^2}, \frac{16s}{s-4\mu^2}\right\}$$

и ρ должно обладать свойством $\rho(s, t) = \rho(t, s)$. Последние два члена после замены переменных равны

$$\frac{\rho(s, u)}{(s-s_0)(u-u_0)} \quad \text{и} \quad \frac{\rho(t, u)}{(t-t_0)(u-u_0)}.$$

Мандельстамовское соотношение как раз и выражает свойство кроссинг-симметрии вместе с определенными свойствами аналитичности.

(ii) *Неупругие процессы*. Для релятивистских систем характерно то, что при наличии достаточной энергии в них может рождаться большое число частиц. Например, если $s > 16\mu^2$, возможна реакция $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0 + \pi^0 + \pi^0$. Унитарность возникает из связи между интерференцией рассеянной и нерассеянной волн и полным рассеянием во *всех* процессах. Она, таким образом, дает связь между $A(s, 0)$ и суммой членов, один из которых отвечает процессу $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^0 + \pi^0$. Даже в случае, когда $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$, возможен неупругий процесс $\pi^0 + \pi^0 \to \pi^+ + \pi^-$ ($\pi^\pm$ — заряженные π-мезоны). Полное рассмотрение потребовало бы учета всех амплитуд рассеяния $\pi + \pi \to \pi + \pi$. Для простоты мы ограничимся моделью, где нет π^+ и π^-. Унитарность, таким образом, представляет собой нелинейное соотношение для A только тогда, когда $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$.

«Гипотеза бутстрапа», предложенная Чью и Мандельстамом, — это идея о существовании для всех процессов только одного набора амплитуд, обладающих «обычными» свойствами аналитичности и удовлетворяющих уравнениям унитарности (связывающим различные процессы). На практике эти уравнения аппроксимируют, заменяя, например, связанные в систему уравнения унитарности неравенствами, когда $s \geqslant 16\mu^2$, как это было сделано выше. Независимо от того, принимаем ли мы идеи бутстрапа или нет, различные уравнения бутстрапа представляют интерес, поскольку на них можно смотреть как на дополнительные условия, налагаемые на амплитуду унитарностью, кроссинг-симметрией и аналитичностью. Даже если они не определяют $A(s, t)$ (а мы не разделяем идей бутстрапа), эти требования налагают суровые ограничения иа амплитуду. A priori вообще не ясно, существует ли хоть какая-нибудь функция $A(s, t)$, обладающая требуемыми свойствами аналитичности, кроссинг-симметрии, унитарности в области упругого рассеяния при $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$ и удовлетворяющая неравенствам унитарности при $s \geqslant 16\mu^2$.

Существование таких функций было установлено Аткинсоном с помощью красивого применения теоремы Лере—Шаудера—Тихонова. Основная идея доказательства такова. Ищем функцию $\rho(s, t)$, которую надо подставить в представление Мандельстама. Если A удовлетворяет требованию упругой унитарности везде, то

$$\rho(s, t) = (T^{\mathrm{el}}\rho)(s, t),$$

где T^{el} — сложное нелинейное отображение. Поскольку упругая унитарность выполняется только в определенных областях, и это равенство справедливо только в определенных областях s, t-плоскости. В общем случае $\rho(s, t) = (T^{\mathrm{el}}\rho)(s, t) + v(s, t)$, где условие $v = 0$ в определенных областях эквивалентно условию упругой унитарности. Если v удовлетворяет некоторым другим условиям, то любое решение уравнения $\rho = T^{\mathrm{el}}\rho + v$ удовлетворяет определенным условиям интегрируемости, приводящим к тому, что A удовлетворяет требованиям упругой унитарности при $4\mu^2 \leqslant s \leqslant 16\mu^2$ и неравенствам неупругой унитарности при $s \geqslant 16\mu^2$. В итоге существование решений таких приближенных уравнений бутстрапа было бы доказано, если бы уравнение $\rho = T\rho$ имело решение со свойством $T\rho = T^{\mathrm{el}}\rho + v$. Аткинсон построил зависящее от v выпуклое множество S_v равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных функций, компактное в $\|\cdot\|_\infty$-топологии и такое, что $T: S_v \to S_v$ непрерывно. В таких условиях теорема Лере—Шаудера—Тихонова обеспечивает существование решений приближенных уравнений бутстрапа.

D. Определение фазы амплитуды рассеяния

Согласно квантовой теории рассеяния (см. гл. XII), «дифференциальное» сечение рассеяния при фиксированной энергии дается функцией

$$D(\theta) = |F(\theta)|^2,$$

где $F(\theta)$ — комплекснозначная функция угла рассеяния θ. При энергиях, при которых идет только упругое рассеяние, F должна удовлетворять нелинейному «соотношению унитарности»

$$\operatorname{Im} F(\theta) = \int \overline{F(\theta_1)}\, F(\theta_2) \sin\theta_1\, d\theta_1\, d\varphi_1,$$

где θ_2 — функция от θ, θ_1 и φ_1, определяемая сферической геометрией (рис. V.4). Величина $z_2 = \cos\theta_2$ выражается через $z = \cos\theta$,

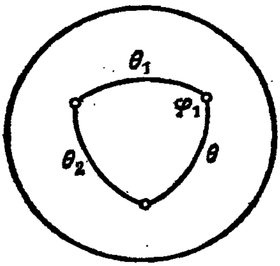

Рис. V.4. Угол θ_2.

$z_1 = \cos\theta_1$ и φ_1 следующим образом:

$$z_2 = zz_1 + \sqrt{(1-z^2)(1-z_1^2)}\cos\varphi_1.$$

В экспериментах измеряют $D(\theta)$, тогда как для теории большой интерес представляет $F(\theta)$. Здесь хочется немедленно задать два вопроса: (1) налагает ли условие унитарности какие-либо ограничения на возможные функции $D(\theta)$, порождаемые функциями F, удовлетворяющими этому условию? (2) Определяется ли F по заданной функции D условием $|F(\theta)| = \sqrt{|D(\theta)|}$ и условием унитарности? Читатель уже должен понимать, что на самом деле это две стороны одного вопроса: речь идет о существовании и единственности.

Введем переменные $z_i = \cos\theta_i$. Пусть $K(z_1, z_2; z)$ — якобиан преобразования от $\langle z_1, \varphi_1\rangle$ к $\langle z_1, z_2\rangle$. Пусть $B(z) = \sqrt{|D(\theta)|}$ задано; положим $F(\theta) = B(z)\, e^{i\varphi(z)}$. Тогда

$$\sin\varphi(z) = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} K(z_1, z_2; z)\,\frac{B(z_1)\,B(z_2)}{B(z)}\, e^{-i(\varphi(z_1)-\varphi(z_2))}\, dz_1\, dz_2,$$

или

$$\varphi(z) = \arcsin\left[\iint K(z_1, z_2; z)\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}\cos[\varphi(z_1) - \varphi(z_2)]\,dz_1\,dz_2\right]. \tag{V.8}$$

Пусть

$$M = \iint |K(z_1, z_2; z)|\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}\,dz_1\,dz_2.$$

Предположим, что $M < 1$. Тогда для любой непрерывной функции $\varphi(z)$ на $[-1, 1]$ корректно определена функция $\mathcal{F}\varphi$, заданная равенством

$$(\mathcal{F}\varphi)(z) = \arcsin\left[\iint K(z_1, z_2; z)\frac{B(z_1)B(z_2)}{B(z)}\times\right.$$
$$\left.\times\cos[\varphi(z_1) - \varphi(z_2)]\,dz_1\,dz_2\right].$$

Ответ на вопрос (1) утвердителен тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}$ обладает неподвижной точкой. Вопрос (2) следующим образом связан с единственностью: пусть $\mu = \arcsin M$. Прежде всего заметим, что если выбрана такая ветвь arcsin, что $-\pi/2 < \arcsin x \leqslant \pi/2$, то $\mathcal{F}$ переводит множество функций φ на $[-1, 1]$ с $\|\varphi\|_\infty \leqslant \mu$ в себя. Далее, если φ удовлетворяет (V.8), непрерывна и $|\varphi(0)| < \pi/2$, то $\|\varphi\|_\infty \leqslant \mu$. Наконец, заметим, что $\varphi(z)$ удовлетворяет (V.8) тогда и только тогда, когда $\tilde{\varphi}(z) = \pi - \varphi(z)$ тоже удовлетворяет (V.8). Таким образом, $\mathcal{F}\varphi = \varphi$ имеет в точности два решения тогда и только тогда, когда существует только одно решение с $|\varphi(z)| \leqslant \mu$ для всех z.

При $M < 0{,}79$ Мартен показал, что $\mathcal{F}$ — сжимающее отображение множества

$$\{\varphi \mid \|\varphi\|_\infty \leqslant \mu;\ \varphi \text{ непрерывна}\}$$

с подходящей метрикой. Отсюда следуют единственность и существование. В общем случае $M < 1$ существование доказано с помощью теоремы Лере—Шаудера—Тихонова, а единственность — нет.

E. Существование корреляционных функций при низкой плотности

В заключение мы кратко обсудим применение одной очень простой теоремы о неподвижной точке в статистической механике. Теорема такова (задача 51):

Теорема V.21. Пусть K — линейное отображение банахова пространства на себя, причем $\|K\| < 1$. Тогда для любого g уравнение $f = g + Kf$ имеет *единственное* решение $f = \sum_{n=0}^{\infty} K^n g$. Пусть K_m —

последовательность таких отображений, причем $\|K_m - K\| \to 0$ и $\|K_m\| < 1$. Если $g_m \to g$, $f_m = g_m + K_m f_m$ и $f = g + Kf$, то $f_m \to f$.

В равновесной статистической механике вводятся «корреляционные функции» $\rho_1(x_1)$, $\rho_2(x_1, x_2)$, ..., $\rho_n(x_1, \ldots, x_n)$, ... В бесконечном объеме, где граничные эффекты перестают играть роль, $\rho_n(x_1, \ldots, x_n)$ — это *плотность* вероятности нахождения частиц в точках $x_1, \ldots, x_n$. Так, например, $\rho_1(x)$ должно равняться постоянной, совпадающей с плотностью.

В случае ящика конечного размера Λ элементарная статистическая механика дает явную формулу для корреляционных функций $\rho_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n; \beta, z)$, где $\beta = (kT)^{-1}$ — обратная температура, $z = e^{\beta\mu}$ — активность, а μ — химический потенциал. Когда мала плотность, т. е. когда система представляет собой газ, z мало. Одна из целей классической статистической механики — доказать существование

$$\lim_{\Lambda \to \infty} \rho_n^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_n; \beta, z)$$

по крайней мере для малых z и/или β, т. е. для высоких температур и/или низких плотностей, когда система находится в газообразном состоянии, так что не возникает осложнений, связанных с разными фазовыми состояниями. Это можно сделать с помощью теоремы V.21. Сначала доказывается, что в конечном ящике функции $\{\rho_n^{(\Lambda)}\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют системе зацепляющихся интегральных уравнений (уравнениям Кирквуда — Зальцбурга):

$$\rho_1^{(\Lambda)}(x_1) = g_1^{(\Lambda)}(x_1) + \sum_{n=1}^{\infty} \int dy_1 \ldots dy_n K_{1,n}^{(\Lambda)}(x_1; y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times \rho_n^{(\Lambda)}(y_1, \ldots, y_n),$$

$$\rho_m^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m) = g_m^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m)\, \rho_{m-1}^{(\Lambda)}(x_2, \ldots, x_m) + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \int dy_1 \ldots dy_n K_{m,n}^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n) \times \\ \times \rho_{n+m-1}^{(\Lambda)}(x_1, \ldots, x_m; y_1, \ldots, y_n).$$

Вводя вектор $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, \ldots, \rho_n, \ldots)$, их схематически можно переписать в виде

$$\boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)} = \mathbf{g}^{(\Lambda)} + \mathbf{K}^{(\Lambda)} \boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)}.$$

Оказывается, на множестве векторов $\boldsymbol{\rho}$ можно так ввести норму, что $\mathbf{K}^{(\Lambda)}$ станет ограниченным оператором. Для малых z и/или β при переходе к бесконечному объему $\mathbf{g}^{(\Lambda)} \to \mathbf{g}$ и $\mathbf{K}^{(\Lambda)} \to \mathbf{K}$, причем нормы всех $\mathbf{K}^{(\Lambda)}$ и $\mathbf{K}$ меньше единицы. Тогда, в силу теоремы V.21, $\boldsymbol{\rho}^{(\Lambda)}$ сходится к единственному решению уравнений Кирквуда — Зальцбурга в бесконечном объеме.

Что касается последних трех примеров, то пусть читатель не думает, что он получил какое-то представление о технических деталях. Мы лишь пытались грубо объяснить, какое отношение имеют ко всему этому теоремы о неподвижной точке, но вся основная черная работа заключается в выборе «подходящих» норм или пространств и доказательстве ограниченности или непрерывности отображений, а этого мы совсем не касались.

V.7. Топологии на локально выпуклых пространствах: теория двойственности и сильная сопряженная топология

В этом разделе мы хотим рассмотреть соотношения между различными локально выпуклыми топологиями на векторном пространстве X. Эти топологии не используются до гл. XVI, но их изучение развивает полезную интуицию и проясняет выбор топологий на $\mathscr{S}$ и $\mathscr{D}$.

Пусть X — векторное пространство и Y — разделяющее точки пространство линейных функционалов на X; такая пара $\langle X, Y\rangle$ называется **дуальной парой.** Мы уже знаем, что на X определена локально выпуклая топология $\sigma(X, Y)$, в которой топологическое сопряженное к X есть в точности Y (теорема IV.20). Прежде всего мы хотим выяснить, каковы другие локально выпуклые топологии на X, порождающие Y как топологическое сопряженное пространство.

Определение. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. **Топология Макки** $\tau(X, Y)$ на X — это топология равномерной сходимости на $\sigma(Y, X)$-компактных выпуклых множествах в Y; это означает, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X,Y)} x$ тогда и только тогда, когда $y(x_\alpha) \to y(x)$ равномерно для всех y из любого фиксированного $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества в Y.

С другой стороны, для каждого $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества C в Y определим ρ_C на X соотношением

$$\rho_C(x) = \sup_{y \in C} |y(x)|.$$

Семейство полунорм $\{\rho_C \mid C$ есть $\sigma(Y, X)$-компактное выпуклое подмножество в $Y\}$ на X порождает топологию $\tau(X, Y)$. Если C компактно, то

$$\tilde{C} = \{\lambda y \mid |\lambda| \leqslant 1,\ y \in C\}$$

тоже компактно (поскольку $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ компактно) и $\rho_C = \rho_{\tilde{C}}$. Таким образом, достаточно рассматривать только уравновешенные выпуклые $\sigma(Y, X)$-компактные множества C.