Что касается последних трех примеров, то пусть читатель не думает, что он получил какое-то представление о технических деталях. Мы лишь пытались грубо объяснить, какое отношение имеют ко всему этому теоремы о неподвижной точке, но вся основная черная работа заключается в выборе «подходящих» норм или пространств и доказательстве ограниченности или непрерывности отображений, а этого мы совсем не касались.

V.7. Топологии на локально выпуклых пространствах: теория двойственности и сильная сопряженная топология

В этом разделе мы хотим рассмотреть соотношения между различными локально выпуклыми топологиями на векторном пространстве X. Эти топологии не используются до гл. XVI, но их изучение развивает полезную интуицию и проясняет выбор топологий на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$.

Пусть X — векторное пространство и Y — разделяющее точки пространство линейных функционалов на X; такая пара $\langle X, Y\rangle$ называется **дуальной парой.** Мы уже знаем, что на X определена локально выпуклая топология $\sigma(X, Y)$, в которой топологическое сопряженное к X есть в точности Y (теорема IV.20). Прежде всего мы хотим выяснить, каковы другие локально выпуклые топологии на X, порождающие Y как топологическое сопряженное пространство.

Определение. Пусть $\langle X, Y\rangle$ — дуальная пара. **Топология Макки** $\tau(X, Y)$ на X — это топология равномерной сходимости на $\sigma(Y, X)$-компактных выпуклых множествах в Y; это означает, что $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X,Y)} x$ тогда и только тогда, когда $y(x_\alpha) \to y(x)$ равномерно для всех y из любого фиксированного $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества в Y.

С другой стороны, для каждого $\sigma(Y, X)$-компактного выпуклого подмножества C в Y определим ρ_C на X соотношением

$$\rho_C(x) = \sup_{y \in C} |y(x)|.$$

Семейство полунорм $\{\rho_C \mid C$ есть $\sigma(Y, X)$-компактное выпуклое подмножество в $Y\}$ на X порождает топологию $\tau(X, Y)$. Если C компактно, то

$$\tilde{C} = \{\lambda y \mid |\lambda| \leqslant 1,\ y \in C\}$$

тоже компактно (поскольку $\{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$ компактно) и $\rho_C = \rho_{\tilde{C}}$. Таким образом, достаточно рассматривать только уравновешенные выпуклые $\sigma(Y, X)$-компактные множества C.

Поскольку отдельные точки в Y образуют компактные в слабой топологии множества, то из $x_\alpha \xrightarrow{\tau(X, Y)} x$ вытекает, что $x_\alpha \xrightarrow{\sigma(X, Y)} x$, т. е. слабая топология слабее топологии Макки.

Пример 1. Пусть X—банахово пространство, а X^*—его сопряженное. Мы утверждаем, что топология $\tau(X, X^*)$ есть в точности топология нормы на X. Действительно, по теореме Банаха—Алаоглу (теорема IV.21) единичный шар X_1^* в X^* $\sigma(X^*, X)$-компактен, так что

$$\rho_{X_1^*}(x) = \sup_{y \in X_1^*} |y(x)|$$

— полунорма Макки, а по теореме Хана—Банаха, $\rho_{X_1^*}(x) = \|x\|_X$. С другой стороны, если множество $C \subset X^*$ $\sigma(X^*, X)$-компактно, то для любого $x \in X$ отображение $y \mapsto y(x)$ ограничено на C, так что $C \subset \{y \mid \|y\| \leqslant m\}$ для некоторого m в силу принципа Банаха—Штейнгауза. В итоге $\rho_C(x) \leqslant m\|x\|_X$. Это показывает, что топология Макки порождается нормой $\|\cdot\|_X$.

Пример 2. Из задачи 52 мы увидим, что любое пространство Фреше X допускает топологию Макки $\tau(X, X^*)$. Любой *строгий* индуктивный предел пространств Фреше также допускает топологию Макки (задачи 52а, d). В частности, топологию Макки допускают пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$.

Вернемся к вопросу об отыскании всех топологий, **согласованных с двойственностью** между X и Y. Так мы называем локально выпуклую топологию $\mathscr{T}$ на X, если топологическое сопряженное к $\langle X, \mathscr{T}\rangle$ совпадает с Y.

Основная теорема двойственности, описывающая все дуальные топологии, гласит:

Теорема V.22 (теорема Макки—Аренса). Пусть $\langle X, Y\rangle$—дуальная пара. Локально выпуклая топология $\mathscr{T}$ на X согласована с двойственностью между X и Y тогда и только тогда, когда

$$\sigma(X, Y) \subseteq \mathscr{T} \subseteq \tau(X, Y).$$

Доказательство. Геометрическое доказательство см. в дополнении к этому разделу. ∎

Итак, дуальные топологии—это в точности те топологии, которые заключены между слабой топологией и топологией Макки (включая последние).

Мы уже видели, как выразить топологию нормы на банаховом пространстве X в терминах дуальной пары $\langle X, X^*\rangle$. А как обстоит дело с топологией нормы на X^*? Она не совпадает с топологией $\tau(X^*, X)$, если X не рефлексивно, ибо $\tau(X^*, X)$-сопряженное к X^* есть X. Ясно, что топология нормы на X^*—это топология равномерной сходимости на единичном шаре в X, и потому нам нужно описание в терминах локальной выпуклости множеств, содержащихся в шарах. Эта потребность удовлетворяется понятием ограниченного множества. Перед тем как определить это понятие, отметим следующую теорему:

Теорема V.23. Пусть E — локально выпуклое пространство с сопряженным F. Для множества $A \subset E$ следующие условия равносильны:

(a) для любой окрестности U нуля $0 \in E$ имеем $A \subset nU = \{nx \mid x \in U\}$ при некотором n;

(b) поляра A° множества A (определение см. в дополнении к этому разделу) — поглощающее множество;

(c) $\sup\limits_{x \in A} \rho(x) < \infty$ для любой непрерывной полунормы ρ на E;

(d) $\sup\limits_{x \in A} |l(x)| < \infty$ для любого $l \in F$.

Доказательство. Эквивалентность (a) и (c) и (b) и (d), по сути дела,— вопрос определений. Теорема V.4 говорит о том, что из (c) следует (d). Поэтому предположим, что (d) выполнено и непрерывная полунорма ρ задана. Пусть $K_\rho = \{x \in E \mid \rho(x) = 0\}$ и E_ρ — векторное пространство E/K_ρ. Тогда ρ «поднимается» в норму на E_ρ. Пусть π — каноническое отображение $E \to E_\rho$ и $A_\rho = \pi[A]$. Легко видеть, что $\sup\limits_{x \in A} \rho(x) < \infty$ тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x \in A_\rho} \rho(x) < \infty$. Пусть $\overline{E}_\rho$ — пополнение E_ρ. Пространство $\overline{E}_\rho$ банахово. Пусть $l \in (E_\rho)^*$. Тогда $l \circ \pi \in E^*$ и

$$\sup_{x \in A} |l(x)| = \sup_{x \in A} |(l \circ \pi)(x)| < \infty.$$

Таким образом, $\sup\limits_{x \in A_\rho} \rho(x) < \infty$ в силу принципа Банаха—Штейнгауза. ∎

Определение. Множество $A \subset E$ локально выпуклого пространства E называется **ограниченным**, если выполнено какое-нибудь одно, а следовательно, и все условия (a)—(d) теоремы V.23.

Из условия (d) видно, что понятие ограниченности одинаково для всех топологий, согласованных с двойственностью между E и F, и, следовательно, это понятие наиболее естественно связано именно с этой двойственностью, а не с какой-то одной топологией на E.

Пример 3. Если X — банахово пространство, то $A \subset X$ ограничено тогда и только тогда, когда $\sup\limits_{x \in A} \|x\| < \infty$, а последнее выполняется тогда и только тогда, когда A содержится в некотором кратном единичного шара. Таким образом, для любого ограниченного линейного отображения на X справедливо неравенство

$$\sup_{x \in A} \| Tx \| \leqslant C_A \| T \|.$$

Пример 4. Пусть X — строгий индуктивный предел пространств X_n, причем каждое X_n — собственное замкнутое подпространство в X_{n+1}. Если x_n — последовательность, для которой $x_n \notin X_n$, то с помощью конструкции, использованной при доказательстве теоремы V.17, можно найти линейный функционал $l \in X^*$, такой, что $\sup_n l(x_n) = \infty$. В итоге любое ограниченное множество $A \subset X$ должно быть на самом деле ограниченным подмножеством некоторого X_n. Таким образом, например, $A \subset \mathscr{D}_\Omega$ ограничено тогда и только тогда, когда (i) существует компакт $K \subset \Omega$, такой, что $\operatorname{supp} f \subset K$, если $f \in A$; (ii) $\sup_{x \in A} \| D^\alpha f \|_\infty < \infty$ для любого $\alpha \in I_+^n$.

Первый пример подсказывает нам, как обобщить топологию нормы на X^*.

Определение. Пусть E — локально выпуклое пространство и F — его сопряженное. **Сильная топология** $\beta(F, E)$ на F — это топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах E, т. е. топология, порождаемая полунормами $\{\rho_A \mid A \subset E$ ограничены$\}$, где $\rho_A(f) = \sup_{x \in A} |f(x)|$.

Любое $\sigma(E, F)$-компактное множество C в E ограничено, потому что $f \in F$ — непрерывные функционалы на C. Следовательно, *сильная топология* $\beta(F, E)$ *сильнее топологии Макки.*

Мы уже обнаружили, что топология $\beta(F, E)$ зависит только от дуальной пары $\langle F, E \rangle$, так что топология нормы на X^* является топологией $\beta(X^*, X)$, если X — банахово пространство. Имея локально выпуклое пространство E, можно образовать его сопряженное E^* и задать на последнем топологию $\beta(E^*, E)$. Сопряженное к E^* в этой топологии называется **вторым сопряженным** пространства E и обозначается E^{**} при наделении его топологией $\beta(E^{**}, E^*)$. Пространство E можно отобразить в E^{**} с помощью канонического отображения ρ: $E \to E^{**}$, задаваемого равенством $\rho(x)(l) = l(x)$. Это отображение *не всегда* непрерывно (задача 54). Если оно является *топологическим* изоморфизмом, то говорят, что E **рефлексивно**, т. е. E рефлексивно, если

(i) $\beta(E^*, E)$-сопряженное к E^* есть E;
(ii) топология $\beta(E, E^*)$ на E совпадает с исходной.

Часто полезен следующий критерий рефлексивности:

Лемма. Пусть E — локально выпуклое пространство. Оно рефлексивно тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

(a) каждое $\sigma(E, E^*)$-замкнутое ограниченное множество в E $\sigma(E, E^*)$-компактно;

(b) каждое $\sigma(E^*, E)$-замкнутое ограниченное множество в E^* $\sigma(E^*, E)$-компактно;

(c) E обладает топологией Макки $\tau(E, E^*)$.

Доказательство. Нетрудно видеть (задача 55), что (a) выполняется тогда и только тогда, когда топологии $\beta(E^*, E)$ и $\tau(E^*, E)$ совпадают, а (b) говорит о том, что $\beta(E, E^*)$ и $\tau(E, E^*)$ одинаковы. Пусть теперь E рефлексивно. Поскольку $E = E^{**}$, топология $\beta(E^*, E)$ согласована с двойственностью, так что $\beta(E^*, E) \subset \tau(E^*, E)$ в силу теоремы Макки — Аренса; но $\tau \subset \beta$, поэтому $\beta(E^*, E) = \tau(E^*, E)$. Аналогично ввиду того, что сопряженное к E есть E^* и E обладает топологией $\beta(E, E^*)$, $\beta(E, E^*) = \tau(E, E^*)$ и E обладает топологией Макки. Обратно, пусть (a) — (c) выполнены. В силу (a), $E = E^{**}$ как векторные пространства, поскольку в этом случае $\beta(E^*, E) = \tau(E^*, E)$, а по теореме V.22 топология Макки согласована с двойственностью. В силу (b) и (c), E обладает топологией $\beta(E, E^*)$. Следовательно, E рефлексивно. ∎

С помощью этой леммы можно доказать (задачи 56, 57), что справедлива

Теорема V.24. Пространства $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}_\Omega$ и $\mathscr{E}_D$ рефлексивны.

В общем случае топология Макки намного сильнее слабой топологии, поэтому множеств, компактных в топологии Макки, значительно меньше, чем слабо компактных. Например, единичный шар в бесконечномерном банаховом пространстве никогда не компактен по норме (задача 4), но слабо компактен, если X рефлексивно. Следовательно, общие теоремы о компактности в топологии Макки являются особенно сильными результатами. Вот наиболее полезный из них:

Теорема V.25. В пространствах $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{D}_\Omega$ и $\mathscr{E}_D$ любое замкнутое ограниченное множество компактно (в обычной топологии Фреше).

Доказательство. Пусть $C \subset \mathscr{S}(\mathbb{R})$ замкнуто и ограничено. Так как $\sup\limits_{f \in C} \|f'\|_\infty = E < \infty$, то $|f(x) - f(y)| \leqslant E\,|x - y|$ всякий раз, когда $f \in C$. В результате C — равномерно равностепенно непрерывное семейство равномерно ограниченных функций. Аналогично, семейство

$$\{x^\alpha D^\beta f \mid f \in C\}$$

равномерно равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. С помощью теоремы Асколи и диагонального метода можно вывести, что любая последовательность в C имеет сходящуюся подпоследовательность. Поскольку C замкнуто, а топология метрическая, это доказывает компактность C. Доказательства в случае $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{S}_D$ аналогичны. В случае $C \subset \mathcal{D}_\Omega$ заметим, что, поскольку C ограничено, $C \subset C^\infty(K)$ при некотором K и, следовательно, можно использовать приведенные выше соображения. ∎

Особенно полезным следствием последней теоремы и теоремы V.8 является

Теорема V.26. *Последовательность* в $\mathcal{S}'$, $\mathcal{D}'$ или $\mathfrak{S}'_D$ сходится в слабой топологии тогда и только тогда, когда она сходится в сильной топологии.

Доказательство. Для $\mathcal{S}'$ и $\mathfrak{S}'_D$ это прямо следует из теорем V.8 и V.25. В случае $\mathcal{D}'$ заметим, что любое ограниченное множество $C \subset \mathcal{D}$ лежит в пространстве $C_0^\infty(K)$, являющемся пространством Фреше, и потому применимы теоремы V.8 и V.25. ∎

Несмотря на то что теорема V.26 по сути является следствием теоремы V.25, мы сформулировали ее как отдельную теорему по той причине, что она весьма полезна в приложениях. Мы призываем читателя обратить внимание на слово *последовательность*. Для направленностей теорема не верна.

Дополнение к § V.7. Поляры и теорема Макки — Аренса

В этом дополнении, которое носит технический характер, доказывается теорема Макки—Аренса и для этого вводится аппарат полярных множеств.

Определение. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара и $A \subset E$. **Полярой** A° множества A называется множество $\{f \in F \mid |f(e)| \leqslant 1 \ \forall e \in A\}$. Если мы хотим явно выделить F, мы пишем $(A)_F^\circ$.

Примеры. (1) Пусть $\mathcal{H}$—гильбертово пространство, сопряженное самому себе. Если A—его подпространство, то $A^\circ \equiv A^\perp$.

(2) Если E—банахово пространство и F—его сопряженное, то

$$\{x \mid \|x\|_E \leqslant k\}^\circ = \{y \mid \|y\|_F \leqslant k^{-1}\}.$$

Легко доказать следующие простые свойства поляр.

Лемма 1. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара. Тогда:

(а) A° выпукла, уравновешена и $\sigma(F, E)$-замкнута;