равномерно равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. С помощью теоремы Асколи и диагонального метода можно вывести, что любая последовательность в C имеет сходящуюся подпоследовательность. Поскольку C замкнуто, а топология метрическая, это доказывает компактность C. Доказательства в случае $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathfrak{S}_D$ аналогичны. В случае $C \subset \mathscr{D}_\Omega$ заметим, что, поскольку C ограничено, $C \subset C^\infty(K)$ при некотором K и, следовательно, можно использовать приведенные выше соображения. ∎

Особенно полезным следствием последней теоремы и теоремы V.8 является

Теорема V.26. *Последовательность* в $\mathscr{S}'$, $\mathscr{D}'$ или $\mathfrak{S}_D'$ сходится в слабой топологии тогда и только тогда, когда она сходится в сильной топологии.

Доказательство. Для $\mathscr{S}'$ и $\mathfrak{S}_D'$ это прямо следует из теорем V.8 и V.25. В случае $\mathscr{D}'$ заметим, что любое ограниченное множество $C \subset \mathscr{D}$ лежит в пространстве $C_0^\infty(K)$, являющемся пространством Фреше, и потому применимы теоремы V.8 и V.25. ∎

Несмотря на то что теорема V.26 по сути является следствием теоремы V.25, мы сформулировали ее как отдельную теорему по той причине, что она весьма полезна в приложениях. Мы призываем читателя обратить внимание на слово *последовательность*. Для направленностей теорема не верна.

Дополнение к § V.7. Поляры и теорема Макки — Аренса

В этом дополнении, которое носит технический характер, доказывается теорема Макки—Аренса и для этого вводится аппарат полярных множеств.

Определение. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара и $A \subset E$. **Полярой** A° множества A называется множество $\{f \in F \mid |f(e)| \leqslant 1 \ \forall e \in A\}$. Если мы хотим явно выделить F, мы пишем $(A)_F^\circ$.

Примеры. (1) Пусть $\mathscr{H}$—гильбертово пространство, сопряженное самому себе. Если A—его подпространство, то $A^\circ \equiv A^\perp$.

(2) Если E—банахово пространство и F—его сопряженное, то

$$\{x \mid \|x\|_E \leqslant k\}^\circ = \{y \mid \|y\|_F \leqslant k^{-1}\}.$$

Легко доказать следующие простые свойства поляр.

Лемма 1. Пусть $\langle E, F\rangle$—дуальная пара. Тогда:

(a) A° выпукла, уравновешена и $\sigma(F, E)$-замкнута;

(b) если $A \subset B$, то $B^\circ \subset A^\circ$;
(c) если $\lambda \neq 0$, то $(\lambda A)^\circ = |\lambda|^{-1} A^\circ$;
(d) $\left(\bigcup_\alpha A_\alpha\right)^\circ = \bigcap_\alpha A_\alpha^\circ$.

Поляры следующим образом связаны с сопряженными пространствами:

Теорема V.27. Пусть E — локально выпуклое пространство и $\mathcal{U}$ — база окрестностей нуля. Рассмотрим дуальную пару $\langle E, E^*_{\mathrm{alg}}\rangle$, где E^*_{alg} — алгебраическое сопряженное, т. е. множество всех линейных функционалов из E в $\mathbf{C}$. Тогда топологическое сопряженное пространства E есть $\bigcup_{U \in \mathcal{U}} U^\circ$, где поляры взяты относительно E^*_{alg}.

Доказательство. Функционал $l \in E^*_{\mathrm{alg}}$ непрерывен тогда и только тогда, когда $|l(x)| \leqslant 1$ для всех x из некоторого $U \in \mathcal{U}$, т. е. тогда и только тогда, когда $l \in U^\circ$ для некоторого $U \in \mathcal{U}$. ∎

Теорема V.28 (теорема о биполяре). Пусть E и F — дуальная пара. Тогда в топологии $\sigma(E, F)$ на E справедливо равенство

$$E^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{a.c.h.}\,(E)},$$

где a.c.h. (E) — абсолютно выпуклая оболочка E, т. е. наименьшее уравновешенное выпуклое множество, содержащее E:

$$\mathrm{a.c.h.}\,(E) = \left\{ \sum_{n=1}^{N} \alpha_n x_n \,\middle|\, x_1, \ldots, x_n \in E,\ \sum_{n=1}^{N} |\alpha_n| = 1,\ N = 1, 2, \ldots \right\},$$

и замыкание взято в топологии $\sigma(E, F)$.

Доказательство. Пусть $E_C = \overline{\mathrm{a.c.h.}\,(E)}$. Ясно, что $E \subset E^{\circ\circ}$, и, поскольку $(E^\circ)^\circ$ выпукло, уравновешено и $\sigma(E, F)$-замкнуто, $E_C \subset (E^\circ)^\circ$. С другой стороны, если $x \notin E_C$, то можно найти $l \in F$, такой, что $\operatorname{Re} l(e) \leqslant 1$ для $e \in E_C$ и $\operatorname{Re} l(x) > 1$ (теорема V.4). Поскольку E_C уравновешено, $\sup_{e \in E_C} |l(e)| \leqslant 1$, так что $l \in E^\circ$. Но тогда из $|l(x)| > 1$ вытекает, что $x \notin E^{\circ\circ}$. ∎

Лемма 2. Топология Макки согласована с двойственностью.

Доказательство. Используем теорему V.27 для того, чтобы вычислить $\tau(E, F)$-сопряженное к E. Полунормы $\{\rho_C\}$, где C пробегает все $\sigma(F, E)$-компактные абсолютно выпуклые множества в F, порождают топологию $\tau(E, F)$. Рассмотрим $C \subset F \subset E^*_{\mathrm{alg}}$. Поскольку сужение топологии $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$ на F есть $\sigma(F, E)$, множество C $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$-компактно, и потому $\sigma(E^*_{\mathrm{alg}}, E)$-замкнуто в E^*_{alg}. Таким образом, по теореме V.28 $(C^\circ)^\circ_{E^*_{\mathrm{alg}}} = C$. Но

$C^\circ = \{x \mid |\rho_C(x)| \leqslant 1\}$. Поэтому множества

$\{C^\circ \mid C$ — выпуклое уравновешенное $\sigma(F, E)$-компактное подмножество в $F\}$

образуют в E базу окрестностей нуля топологии $\tau(E, F)$. Следовательно,

$$E_\tau^* = \bigcup_C (C^\circ)^\circ_{E^*_{\text{alg}}} = \bigcup_C C = F. \blacksquare$$

Лемма 3 (теорема Бурбаки — Алаоглу). Пусть $U \subset E$ — уравновешенная выпуклая окрестность нуля некоторой топологии, согласованной с двойственностью между E и F. Тогда U_F^* есть $\sigma(F, E)$-компактное множество в F.

Доказательство. По существу это другая формулировка теоремы Бурбаки — Алаоглу (теоремы IV.21); см. задачу 58. ∎

Лемма 4. Каждая топология, согласованная с двойственностью, слабее топологии Макки.

Доказательство. Пусть ρ — полунорма на E с некоторой топологией, согласованной с двойственностью. Покажем, что $\rho = \rho_C$ для некоторого $\sigma(F, E)$-компактного выпуклого подмножества C в F. Пусть $U = \{x \mid |\rho(x)| \leqslant 1\}$. Тогда U уравновешено, выпукло и $\sigma(E, F)$-замкнуто в силу теоремы V.4 (см. задачу 20с). Следовательно, по теореме о биполяре $(U^\circ)^\circ = U$. Пусть $C = U^\circ \subset F$. В силу леммы 3 подмножество C $\sigma(F, E)$-компактно и выпукло. Но по определению $(U^\circ)^\circ = \{x \mid |\rho_C(x)| \leqslant 1\} = U$, так что $\rho_C = \rho$. ∎

Теперь мы готовы привести

Доказательство теоремы V.22. Поскольку топологии $\sigma(E, F)$ и $\tau(E, F)$ согласованы с двойственностью (лемма 2 и теорема IV.20), любая топология $\mathcal{T}$ «между ними» также согласована с двойственностью. Но по определению $\sigma(E, F)$ — слабейшая из таких топологий, а по лемме 4 $\tau(E, F)$ — сильнейшая из них. ∎

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *V.1.* Общую теорию локально выпуклых пространств см. в следующих книгах: Choquet (см. замечания к § IV.1); J. Kelley and I. Namioka, Linear Topological Spaces, Van Nostrand—Reinhold, Princeton, N. J., 1963; G. Köthe, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969; А. Робертсон, В. Робертсон, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1967; X. Шефер, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1971.

Книга Робертсонов — прекрасная маленькая монография; из остальных наиболее подходящей для чтения нам кажется книга Кёте. Тем, кто любит задачи, порекомендуем книгу Келли — Намиока, содержащую их в большом количестве, однако заметим, что в целом она не столь хороша, как книга Келли по топологии.