$C^\circ = \{x \mid |\rho_C(x)| \leqslant 1\}$. Поэтому множества

$$\{C^\circ \mid C \text{ — выпуклое уравновешенное } \sigma(F, E)\text{-компактное подмножество в } F\}$$

образуют в E базу окрестностей нуля топологии $\tau(E, F)$. Следовательно,

$$E_\tau^* = \bigcup_C (C^\circ)^\circ_{E^*_{\mathrm{alg}}} = \bigcup_C C = F. \quad \blacksquare$$

Лемма 3 (теорема Бурбаки — Алаоглу). Пусть $U \subset E$ — уравновешенная выпуклая окрестность нуля некоторой топологии, согласованной с двойственностью между E и F. Тогда U_F^* есть $\sigma(F, E)$-компактное множество в F.

Доказательство. По существу это другая формулировка теоремы Бурбаки — Алаоглу (теоремы IV.21); см. задачу 58. ∎

Лемма 4. Каждая топология, согласованная с двойственностью, слабее топологии Макки.

Доказательство. Пусть ρ — полунорма на E с некоторой топологией, согласованной с двойственностью. Покажем, что $\rho = \rho_C$ для некоторого $\sigma(F, E)$-компактного выпуклого подмножества C в F. Пусть $U = \{x \mid |\rho(x)| \leqslant 1\}$. Тогда U уравновешено, выпукло и $\sigma(E, F)$-замкнуто в силу теоремы V.4 (см. задачу 20с). Следовательно, по теореме о биполяре $(U^\circ)^\circ = U$. Пусть $C = U^\circ \subset F$. В силу леммы 3 подмножество C $\sigma(F, E)$-компактно и выпукло. Но по определению $(U^\circ)^\circ = \{x \mid |\rho_C(x)| \leqslant 1\} = U$, так что $\rho_C = \rho$. ∎

Теперь мы готовы привести

Доказательство теоремы V.22. Поскольку топологии $\sigma(E, F)$ и $\tau(E, F)$ согласованы с двойственностью (лемма 2 и теорема IV.20), любая топология $\mathcal{T}$ «между ними» также согласована с двойственностью. Но по определению $\sigma(E, F)$ — слабейшая из таких топологий, а по лемме 4 $\tau(E, F)$ — сильнейшая из них. ∎

ЗАМЕЧАНИЯ

§ V.1. Общую теорию локально выпуклых пространств см. в следующих книгах: Choquet (см. замечания к § IV.1); J. Kelley and I. Namioka, Linear Topological Spaces, Van Nostrand—Reinhold, Princeton, N. J., 1963; G. Köthe, Topological Vector Spaces, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1969; А. Робертсон, В. Робертсон, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1967; X. Шефер, Топологические векторные пространства, «Мир», М., 1971.

Книга Робертсонов — прекрасная маленькая монография; из остальных наиболее подходящей для чтения нам кажется книга Кёте. Тем, кто любит задачи, порекомендуем книгу Келли — Намиока, содержащую их в большом количестве, однако заметим, что в целом она не столь хороша, как книга Келли по топологии.

Первая формулировка теоремы Хана — Банаха в терминах разделяющих выпуклых множеств содержится в работе: S. Mazur, Über konvexe Mengen in linearen normierten Raumen, *Studia Math.*, 4 (1933), 70—84. В более современной форме (теорема V.4) ее доказали Эйдельхейт и Какутани: M. Eidelheit, Zur Theorie der konvexen Mengen in linearen normierten Raumen, *Studia Math.*, 6 (1936), 104—111; S. Kakutani, Ein Beweis der Satzes von M. Eidelheit über konvexe Mengen, *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 13 (1937), 93—94.

Локально выпуклые пространства — это топологические векторные пространства, в которых выполняется теорема Хана — Банаха, и потому они обладают обширными топологическими сопряженными. Пространства L^p при $0 < p < 1$ служат примером пространств, на которых нет ни одного непрерывного линейного функционала; см. Кёте, стр. 156—158.

§ *V.2.* Термин «пространство Фреше» ввел Банах в своей классической книге. Теорема V.5 — это частный случай общей теоремы о метризуемости равномерных пространств; см. Дж. Келли, Общая топология, стр. 246.

§ *V.3* и *V.4*. Теория обобщенных функций, включая распределения умеренного роста, была развита Л. Шварцем и очень хорошо описана в его классической книге Théorie des distributions, v. I—II, Hermann, Paris, 1957, 1959. Весьма удачны также пять томов, написанных И. М. Гельфандом, Г. Е. Шиловым и др. и изданных Государственным издательством физико-математической литературы в 1959—1962 гг. под общим названием «Обобщенные функции». Неформально многие из понятий теории обобщенных функций обсуждались уже в 30-е годы Бохнером, Фридрихсом и Соболевым.

Упомянутая в § V.3 процедура перенормировок фейнмановских амплитуд принадлежит Н. Н. Боголюбову и О. С. Парасюку: Über die Multiplikation der Kausalfunktionen in der Quantentheorie der Felder, *Acta Math.*, 97 (1957), 227—266; см. также K. Hepp, Proof of the Bogoliubov—Parasiuk Theorem on Renormalization, *Commun. Math. Phys.*, 2 (1966), 301—326; E. Speer, Generalized Feynman Amplitudes, Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1969.

Теорема о ядре (теорема V.12) служит начальной точкой общего обсуждения пространств, для которых справедливы такие теоремы. Теория ядерных пространств впервые построена в работе: A. Grothendieck, Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires, Mem. Amer. Math. Soc., № 16, 1955; см. также Шефер, Гельфанд, т. 4, и F. Trèves, Topological Vector Spaces, Distributions and Kernels, Academic Press, New York, 1967.

В дополнении к § V.3 мы следовали работе: B. Simon, Distributions and Their Hermite Expansions, *J. Math. Phys.*, 12 (1971), 140—148. Представление пространства $\mathcal{S}$ целыми функциями, тоже позволяющее провести доказательство теоремы о ядре, обсуждается в статье: V. Bargmann, On a Hilbert Space of Analytic Functions and an Associated Integral Transform; II: A Family of Related Function Spaces, Application to Distribution Theory, *Comm. Pure Appl. Math.*, 20 (1967), 1—102.

Понятие индуктивного предела впервые систематически разрабатывалось французской школой: Л. Шварцем, Ж. Дьедонне, А. Гротендиком. Существует обобщение понятия строгого индуктивного предела, при котором от инъекции $X_n \to X_{n+1}$ требуется только непрерывность (вместо непрерывности и открытости). Кроме того, при определении такого «индуктивного предела» семейство индексов может быть любым направленным множеством. Дополнительное обсуждение см. у Кёте, стр. 215—233, или у Робертсонов, стр. 114—144, 185—189. В частности, пункт (d) теоремы V.15 доказан у Робертсонов на стр. 186.

Дополнительное обсуждение слабых решений уравнений в частных производных читатель может найти в следующих книгах (перечисляем в порядке требуемого уровня искушенности): I. Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, v. 1, 2, Macmillan, New York, 1968; A. Friedman, Partial Differential Equations, Holt, New York, 1969; S. Agmon, Lectures on

Elliptic Boundary Value Problems, Van Nostrand-Reinhold, Princeton, N.J., 1965; Л. Хёрмандер, Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.

§ V.5. Общее обсуждение теорем о неподвижной точке в случае нелинейных отображений см. в книге: T. L. Saaty, J. Bram, Nonlinear Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1964, или: М. А. Красносельский, Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений, Гостехиздат, М.—Л., 1956. Особый интерес представляют попытки применить понятия алгебраической топологии к бесконечномерным пространствам; по этому поводу см. A. Granas, Introduction to Topology of Functions Spaces, Univ. of Chicago Math. Notes, 1961, или J. Cronin, Fixed Points and Topological Degree in Nonlinear Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1964. Доказательство теоремы V.19 можно найти в книге Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. I, ИЛ, М., 1962, стр. 490—495. Наиболее глубокая часть теоремы основывается на теореме Брауэра о замкнутом единичном шаре — «аналитическое доказательство» этой теоремы можно найти на стр. 506—508 книги Данфорда и Шварца. Более «естественное» доказательство с точки зрения алгебраической топологии см. в любой книге по теории гомологий, например: П. Хилтон и С. Уайли, Теория гомологий, «Мир», М., 1966.

Тот факт, что теорема Брауэра обобщается на некоторые бесконечномерные пространства, впервые отмечен Дж. Д. Биркгофом и О. Д. Келлогом в статье: G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg, Invariant Points in Function Space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 23 (1922), 96—115. В двух статьях Шаудера: J. Schauder, Zur Theorie Stetiger Abbildungen in Funktionalräumen, *Math. Z.*, 26 (1927), 47—65, 417—431; Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen, *Studia Math.*, 2 (1930), 171—180, теорема доказана в случае банаховых пространств. Общая теорема доказана А. Н. Тихоновым: Ein Fixpunktsatz, *Math. Ann.*, 111 (1935), 767—776.

Теорему Маркова — Какутани впервые доказал А. А. Марков в работе: Некоторые теоремы об абелевых множествах, *ДАН СССР*, 10 (1936), 311—314, используя теорему Тихонова о произведении компактных множеств. Доказательство, которое привели мы, дал Какутани: S. Kakutani, Two Fixed-Point Theorems Concerning Bicompact Convex Sets, *Proc. Imp. Akad. Tokyo*, 14 (1938), 242—245.

Существует обширная литература, касающаяся различных теорем о неподвижной точке. Например: E. Begle, A Fixed Point Theorem, *Ann. Math.*, 51 (1950), 544—550; H. Bohenhwst, S. Karlin, On a Theorem of Ville, in «Contributions to the Theory of Games» ed. by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Princeton Univer. Press, Princeton, N. J., 1950; F. Browder, Asymptotic Fixed Point Theorems, *Math. Ann.*, 185 (1970), 38—61; S. Eilenberg, D. Montgomery, Fixed Point Theorems for Multi-valued Transformations, *Amer. J. Math.*, 68 (1946), 214—222; K. Fin, A Generalization of Tychonoff's Fixed Point Theorem, *Math. Ann.*, 142 (1961), 305—310; I. Glicksberg, A Further Generalization of the Kakutani Fixed Point Theorem with Applications to Nash Equilibrium Points, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3 (1952), 170—174; W. Horn, Some Fixed Point Theorems for Compact Maps and Flows in Banach Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 149 (1970), 391—404; S. Kakutani, A Generalization of Brouwer's Fixed Point Theorem, *Duke Math. J.*, 8 (1941), 457—459; J. Leray, Théorie des points fixés, indice total et nombre de Lefschetz, *Bull. Soc. Math. France*, 87 (1959), 221—223; R. Nussbaum, Some Fixed Point Theorems, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 77 (1971), 360—365.

§ V.6. Обсуждение приложений теорем о неподвижной точке в теории обыкновенных дифференциальных уравнений см. в книге: L. Loomis, S. Sternberg, Advanced Calculus, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1968, pp. 226—304, где рассматривается также применение в дифференциальном исчислении тео-

ремы о сжимающем отображении (pp. 166—167; 230—234); см. также G. Goffman, Preliminaries to Functional Analysis, in «Studies in Modern Analysis» (ed. by R. C. Buck), Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1962, pp. 149—150, 153—154. Гофман дает доказательство приведенной в тексте теоремы существования, используя равностепенную непрерывность и теорему Стоуна—Вейерштрасса, но не ссылаясь на теорему Лере—Шаудера—Тихонова.

Интеграл Хаара мы обсуждаем более подробно в гл. XIV. Его историю см. в замечаниях к той же главе.

Общие идеи бутстрапа обсуждаются в книге Дж. Чью, Аналитическая теория S-матрицы, «Мир», М., 1968.

Представление Мандельстама было впервые предложено им в статье: S. Mandelstam, Determination of the Pion—Nucleon Scattering Amplitude from Dispersion Relations and Unitarity, General Theory, *Phys. Rev.*, **112** (1958), 1344—1360. В теории потенциального рассеяния оно впервые было доказано в работе: R. Blankenbecker, M. L. Goldberger, N. N. Khuri, S. A. Treiman, Mandelstam Representation for Potential Scattering, *Ann. Phys.*, **10** (1960), 62—93. Дополнительное обсуждение случая потенциального рассеяния можно найти в книге В. де Альфаро и Т. Редже, Потенциальное рассеяние, «Мир», М., 1966.

Работу Аткинсона, которую мы обсуждали в § V.6c, можно найти в журнале *Nucl. Phys.*, **B7** (1968), 375—408; **B8** (1968), 377—390; **B13** (1969), 415—436; **B23** (1970), 397—412, где опубликованы статьи: D. Atkinson, A Proof of the Existence of Functions that Satisfy Exactly Both Crossing and Unitarity. Дополнительное обсуждение теорем о неподвижной точке в применении к интегральным уравнениям физики высоких энергий см. в работах: C. Lovelace, Uniqueness and Symmetry Breaking in S-Matrix Theory, *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 261—302; J. Kupsch, Scattering Amplitudes that Satisfy a Mandelstam Representation with One Subtraction and Unitarity, *Nucl. Phys.*, **B11** (1969), 573—587; R. L. Warnock, Nonlinear Analysis Applied to S-matrix Theory, Boulder Lectures in Theoretical Physics, 1968, Benjamin, New York, 1969, pp. 72—86.

Результаты Мартена об определении фазы амплитуды рассеяния по ее величине и условию унитарности можно найти в статье: A. Martin, Construction of the Scattering Amplitude from Differential Cross Sections, *Nuovo Cimento*, **59A** (1969), 131—151. Обсуждение результатов Мартена и некоторых результатов Аткинсона, относящихся к бутстрапу, основанное только на теореме о сжимающем отображении, содержится в работе: D. Atkinson, Introduction to the Use of Non-Linear Techniques in S-Matrix Theory, *Acta Phys. Austriaca Suppl.*, 7 (1970), 32—70. Первым, кто использовал теоремы о неподвижной точке при изучении вопроса о фазе амплитуды рассеяния, видимо, следует считать Р. Дж. Ньютона, см. R. G. Newton, Determination of the Amplitude from the Differential Cross Section by Unitarity, *J. Math. Phys.*, **9** (1968), 2050—2055. Примеры дифференциальных сечений, для которых амплитуды определяются неоднозначно (и для которых $M > 1$ в обозначениях примера (d)), построены в работе: J. Crichton, Phase-Shift Ambiguities for Spin-Independent Scattering, *Nuovo Cimento*, **45A** (1966), 256—258.

Применение теорем о неподвижной точке в статистической механике можно найти в следующих источниках: Д. Рюэль, Статистическая механика, «Мир», М., 1971; J. Groenveld, Two Theorems on Classical Many-Particle Systems, *Phys. Lett.*, **3** (1962), 50—51; O. Penrose, Convergence of Fugacity Expansions for Fluids and Lattice Gases, *J. Math. Phys.*, **4** (1963), 1312—1320; D. Ruelle, Correlation Functions of Classical Gases, *Ann. Phys.*, **25** (1963), 109—120; G. Gallavotti, S. Miracle-Sole, Correlation Functions of a Lattice System, *Commun. Math. Phys.*, 7 (1968), 274—288.

§ V.7. Понятие дуальной пары восходит к работам Ж. Дьедонне и Дж. Макки. Теорема Макки—Аренса впервые была доказана Макки: G. Mackey, On Convex Topological Linear Spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **60** (1946), 519—

537, и Аренсом: R. F. Arens, Duality in Linear Spaces, *Duke Math. J.*, 14 (1947), 787—794.

Пространство, в котором каждое замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество является окрестностью нуля, называется *бочечным*. По теореме Бэра каждое пространство Фреше бочечно, и путем элементарных рассуждений можно показать, что строгий индуктивный предел пространств Фреше—также бочечное пространство. Бочечное пространство, в котором каждое замкнутое ограниченное множество компактно, называется *монтелевым*. Таким образом, теорема V.25 утверждает, что определенные пространства являются монтелевыми. Монтелевы пространства автоматически рефлексивны (поэтому теорема V.24 следует из теоремы V.25), а их сопряженные при наделении сильной топологией Макки также становятся монтелевыми. Подробнее см. в книге Кёте, стр. 369—372. Монтелевы, в частности, пространства $\mathscr{S}'$ и $\mathscr{D}'$.

Поляра A° часто определяется так: $A^\circ = \{f \in F \mid \operatorname{Re} f(e) \geqslant -1$ для всех $e \in A\}$. Если A выпукло и уравновешено, то это определение совпадает с данным нами. Но в случае, когда A—конус, новое определение значительно полезнее. Например, при определении, приведенном в тексте, поляра множества $\{f \in C(X) \mid f \geqslant 0\}$ равна $\{0\}$, тогда как при новом определении полярой оказывается множество всех положительных мер.

ЗАДАЧИ

1. (a) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, задаваемую одной нормой, если эта топология порождается конечным числом полунорм.

(b) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, порождаемую одной нормой, тогда и только тогда, когда нуль обладает ограниченной окрестностью.

2. Пусть X—бесконечномерное локально выпуклое пространство и X^*—его сопряженное. Докажите, что ни одна $\sigma(X, X^*)$-непрерывная полунорма не является нормой, так что переход к полунормам существен.

3. (a) Пусть $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—семейство полунорм, такое, что некоторая конечная сумма $\rho_{\alpha_1} + \ldots + \rho_{\alpha_n}$ является нормой. Докажите, что $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ эквивалентно некоторому семейству норм.

(b) Докажите, что любая локально выпуклая топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с обычной топологией. [*Указание*. Используйте эквивалентность всех норм на $\mathbb{R}^n$ и следующее построение. Возьмем полунорму $\rho_1 \neq 0$ и положим $V_1 = \{x \mid \rho_1(x) = 0\}$; $\dim V_1 \leqslant n-1$. Если $V_1 \neq \{0\}$, возьмем такие $x_1 \in V_1$ и ρ_2, чтобы $\rho_2(x_1) \neq 0$. Положим $V_2 = \{x \mid (\rho_1 + \rho_2)(x) = 0\}$; $\dim V_2 \leqslant n-2$; и т. д.]

(c) Пусть X—локально выпуклое пространство. Покажите, что любой линейный функционал, определенный на конечномерном подпространстве в X, имеет непрерывное продолжение на все X.

(d) Докажите, что любое конечномерное подпространство локально выпуклого пространства замкнуто.

4. В этой задаче требуется доказать, что каждое локально компактное локально выпуклое пространство конечномерно.

(a) Пусть U—компактная окрестность нуля. Покажите, что можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$, что $U \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} (x_i + {}^1/_2 U)$, и, следовательно, такое конечномерное пространство M, что $U \subset M + {}^1/_2 U$.

(b) Докажите, что $U \subset M + (1/2)^m U$ для любого m.