537, и Аренсом: R. F. Arens, Duality in Linear Spaces, *Duke Math. J.*, 14 (1947), 787—794.

Пространство, в котором каждое замкнутое выпуклое уравновешенное поглощающее множество является окрестностью нуля, называется *бочечным*. По теореме Бэра каждое пространство Фреше бочечно, и путем элементарных рассуждений можно показать, что строгий индуктивный предел пространств Фреше—также бочечное пространство. Бочечное пространство, в котором каждое замкнутое ограниченное множество компактно, называется *монтелевым*. Таким образом, теорема V.25 утверждает, что определенные пространства являются монтелевыми. Монтелевы пространства автоматически рефлексивны (поэтому теорема V.24 следует из теоремы V.25), а их сопряженные при наделении сильной топологией Макки также становятся монтелевыми. Подробнее см. в книге Кёте, стр. 369—372. Монтелевы, в частности, пространства $\mathcal{S}'$ и $\mathcal{D}'$.

Поляра A° часто определяется так: $A^\circ=\{f\in F \mid \operatorname{Re} f(e)\geqslant -1$ для всех $e\in A\}$. Если A выпукло и уравновешено, то это определение совпадает с данным нами. Но в случае, когда A—конус, новое определение значительно полезнее. Например, при определении, приведенном в тексте, поляра множества $\{f\in C(X) \mid f\geqslant 0\}$ равна $\{0\}$, тогда как при новом определении полярой оказывается множество всех положительных мер.

ЗАДАЧИ

1. (a) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, задаваемую одной нормой, если эта топология порождается конечным числом полунорм.

(b) Докажите, что локально выпуклое пространство имеет топологию, порождаемую одной нормой, тогда и только тогда, когда нуль обладает ограниченной окрестностью.

2. Пусть X—бесконечномерное локально выпуклое пространство и X^*—его сопряженное. Докажите, что ни одна $\sigma(X, X^*)$-непрерывная полунорма не является нормой, так что переход к полунормам существен.

3. (a) Пусть $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$—семейство полунорм, такое, что некоторая конечная сумма $\rho_{\alpha_1}+\ldots+\rho_{\alpha_n}$ является нормой. Докажите, что $\{\rho_\alpha\}_{\alpha\in A}$ эквивалентно некоторому семейству норм.

(b) Докажите, что любая локально выпуклая топология на $\mathbb{R}^n$ совпадает с обычной топологией. [*Указание*. Используйте эквивалентность всех норм на $\mathbb{R}^n$ и следующее построение. Возьмем полунорму $\rho_1\neq 0$ и положим $V_1=\{x \mid \rho_1(x)=0\}$; $\dim V_1\leqslant n-1$. Если $V_1\neq\{0\}$, возьмем такие $x_1\in V_1$ и ρ_2, чтобы $\rho_2(x_1)\neq 0$. Положим $V_2=\{x \mid (\rho_1+\rho_2)(x)=0\}$; $\dim V_2\leqslant n-2$; и т. д.]

(c) Пусть X—локально выпуклое пространство. Покажите, что любой линейный функционал, определенный на конечномерном подпространстве в X, имеет непрерывное продолжение на все X.

(d) Докажите, что любое конечномерное подпространство локально выпуклого пространства замкнуто.

4. В этой задаче требуется доказать, что каждое локально компактное локально выпуклое пространство конечномерно.

(a) Пусть U—компактная окрестность нуля. Покажите, что можно найти такие $x_1, \ldots, x_n$, что $U\subset\bigcup_{i=1}^{n}(x_i+{}^1/_2U)$, и, следовательно, такое конечномерное пространство M, что $U\subset M+{}^1/_2U$.

(b) Докажите, что $U\subset M+(1/2)^m U$ для любого m.

(c) Докажите, что $U \subset \overline{M}$.

(d) Выведите отсюда, что $\overline{M} = X = M$.

5. Пусть X — банахово пространство, X^* и X^{**} — его сопряженное и второе сопряженное. Пусть X_1 — единичный шар в X, а X_1^{**} — единичный шар в X^{**}. Докажите, что

(a) X_1 $\sigma(X^{**}, X^*)$-плотно в X_1^{**}. [*Указание*: воспользуйтесь теоремой V.6 (c) применительно к X^* с топологией $\sigma(X^{**}, X^*)$.]

(b) X рефлексивно тогда и только тогда, когда его единичный шар $\sigma(X, X^*)$-компактен.

†*6.* Докажите три предложения в начале § V.1.

†*7.* Докажите, что семейства $\{\rho_C^{(2)}\}$ и $\{\rho_C\}$ на $\mathfrak{S}_D$ эквивалентны. [*Указание*: используйте интегральную формулу Коши, проинтегрированную по кольцевой области.]

†*8.* Пусть C — поглощающее подмножество в V, такое, что $tx \in C$, если $x \in C$ и $0 \leqslant t < 1$. Пусть ρ — функционал Минковского для C. Докажите, что:

(a) $\rho(tx) = t\rho(x)$, если $t \geqslant 0$;

(b) $\rho(x+y) \leqslant \rho(x) + \rho(y)$ тогда и только тогда, когда $t(^1/_2\, x + ^1/_2\, y) \in C$ для всех $x, y \in C$ и $0 \leqslant t < 1$;

(c) $\rho(\lambda x) = |\lambda|\rho(x)$ тогда и только тогда, когда $\lambda u \in C$ для всех $u \in C$ и таких λ, что $|\lambda| < 1$;

(d) $\{x \mid \rho(x) < 1\} \subset C \subset \{x \mid \rho(x) \leqslant 1\}$.

†*9.* Докажите теорему V.2.

†*10.* (a) Завершите доказательство теоремы V.5.

(b) Докажите предложение, следующее за теоремой V.5.

11. Пусть A и B — поглощающие множества, обладающие таким свойством: если $x \in A$ (соответственно B) и $0 \leqslant t \leqslant 1$, то $tx \in A$ (соответственно B). Пусть ρ_A, ρ_B — функционалы Минковского. Докажите, что:

(a) $\rho_B \leqslant \rho_A$ тогда и только тогда, когда $tA \subset B$ для всех $0 \leqslant t \leqslant 1$;

(b) $\rho_{A \cap B} = \max(\rho_A, \rho_B)$;

(c) $\rho_{A \cup B} = \min(\rho_A, \rho_B)$.

12. В теории функций нескольких комплексных переменных встречаются открытые в $\mathbf{C}^n$ множества O, O', $O \subset O'$, обладающие тем свойством, что любая аналитическая в O функция имеет продолжение в O'. В таком случае пусть $K \subset O$ — компакт, и пусть $\hat{K} = \{z \in O' \mid |f(z)| \leqslant \sup_{w \in K} |f(w)|$ для всех f, аналитических в $O'\}$. В этой теории доказывается полезная теорема о том, что

$$\bigcup_{\substack{K \subset O \\ K \text{ компактное}}} \hat{K} = O'.$$

(a) Покажите, что равенство $\bigcup \hat{K} = O'$ следует из совпадения топологий равномерной сходимости на компактных подмножествах в O и на компактах в O'.

(b) Используйте теорему V.6 для доказательства совпадения топологий, упомянутых в пункте (a).

13. Пусть Z — метрическое пространство. Пусть X^* — сопряженное к некоторому пространству Фреше. Предположим, что $f\colon Z \longrightarrow X^*$ непрерывно, когда X^* наделено топологией $\sigma(X^*, X)$. Докажите, что это отображение непрерывно и тогда, когда X^* наделено топологией $\tau(X^*, X)$. [*Указание*: используйте теорему V.8.]

14. Как изменятся выводы задачи 13, если в ней заменить Z на произв льное топологическое пространство?

15. В этой задаче требуется доказать, что каждое равномерно выпуклое банахово пространство (определение равномерной выпуклости см. в задаче 25 гл. III) рефлексивно.

(a) Пусть X равномерно выпукло и $x, y \in X$, $l \in X^*$. Докажите, что $\|x-y\| < \varepsilon$, если $\|x\| = \|y\| = \|l\| = 1$, $\operatorname{Re} l(x) > 1-\delta(\varepsilon)$ и $\operatorname{Re} l(y) > 1-\delta(\varepsilon)$.

(b) Пусть X равномерно выпукло. Предположим, что $\{x_\alpha\}$ — такая направленность в X, что $x_\alpha \to x \in X^{**}$ в топологии $\sigma(X^{**}, X^*)$. Предположим, что $\|x\| = 1$, $\|x_\alpha\| \leqslant 1$ для всех α. Используя (a), докажите, что x_α — направленность Коши относительно $\|\cdot\|$.

(c) Докажите, что $X = X^{**}$. (Используйте задачу 5a.)

Замечание. Теорему, сформулированную в задаче 15, доказали Д. П. Мильман (О некоторых признаках регулярности пространств типа (B), *ДАН СССР*, 20 (1938), 243—246) и Петтис (B. J. Pettis, A proof that every uniformly convex space is reflexive, *Duke Math. J.*, 5 (1939), 249—253).

16. (a) Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$ и φ_y — функция на $\mathcal{S}$, определяемая равенством $\varphi_y(x) = \varphi(x-y)$. Докажите, что отображение $y \mapsto \varphi_y$ есть бесконечно дифференцируемая функция из $\mathbb{R}^n$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ со свойством $D^\alpha(\varphi_y) = (-1)^\alpha (D^\alpha \varphi)_y$. Сказать, что $y \mapsto \varphi_y$ обладает производной $\partial\varphi_y/\partial y_j$ как функция со значениями в $\mathcal{S}$, — это значит утверждать, что

$$\lim_{y \to y_0} |y-y_0|^{-1} \left[\varphi_y - \varphi_{y_0} - \sum_{j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial y_j}(\varphi_y)\cdot(y-y_0)_j \right] = 0$$

в топологии $\mathcal{S}$. Докажите также, что $|y|^n D^\alpha \varphi_y \to 0$ для всех α, n при $y \to \infty$.

(b) Пусть $T \in \mathcal{S}'$. Пусть $\varphi \in \mathcal{S}$. Определим функцию T^φ равенством $T^\varphi(y) = T(\varphi_y)$. Докажите, что $T^\varphi \in \mathcal{S}$.

(c) Пусть $\varphi_n \in \mathcal{S}$ и $\varphi_n \to \delta$ в слабой топологии на $\mathcal{S}'$. Докажите, что $T^{\varphi_n} \to T$ для всех $T \in \mathcal{S}'$ в слабой топологии на $\mathcal{S}'$.

(d) Докажите, что $\mathcal{S}$ плотно в $\mathcal{S}'$.

17. Пусть X и Y — локально выпуклые пространства, и пусть X^*, Y^* — их топологические сопряженные. Предположим, что T: $X \to Y$ линейно и непрерывно. Определим сопряженное отображение T': $Y^* \to X^*$ равенством $[T'(y^*)](x) = y^*(Tx)$. Докажите, что:

(a) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\sigma(X^*, X)$ и $\sigma(Y^*, Y)$, то T' непрерывно;

(b) если X и Y снабжены топологиями $\sigma(X, X^*)$ и $\sigma(Y, Y^*)$, то T непрерывно;

(c) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\tau(X^*, X)$ и $\tau(Y^*, Y)$, то T' непрерывно (используйте (b));

(d) отображение T переводит ограниченные подмножества X в ограниченные подмножества Y;

(e) если X^* и Y^* снабжены топологиями $\beta(X^*, X)$ и $\beta(Y^*, Y)$, то T' непрерывно.

18. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства и T: $X \to Y$ — непрерывное линейное отображение. Зададим на X^* и Y^* слабые топологии, так что $(X^*)^* = X$; $(Y^*)^* = Y$.

(a) Докажите, что в этом случае $(T')' = T$.

(b) Выведите отсюда, что T непрерывно, когда X и Y наделены топологиями $\tau(X, X^*)$ и $\tau(Y, Y^*)$.

(c) Выведите отсюда, что T непрерывно, когда X и Y наделены топологиями $\beta(X, X^*)$ и $\beta(Y, Y^*)$.

19. Пусть X, Y — локально выпуклые пространства и $T\colon X \longrightarrow Y$ — непрерывное линейное отображение. Пусть T' — сопряженное отображение из Y^* в X^*. Докажите, что:
(a) отображение T' инъективно тогда и только тогда, когда $\overline{\operatorname{Ran} T} = Y$;
(b) отображение T инъективно тогда и только тогда, когда $\overline{\operatorname{Ran} T'} = X^*$ в топологии $\sigma(X^*, X)$ или $\tau(X^*, X)$.
(c) Пусть $\iota\colon \mathscr{S} \longrightarrow \mathscr{S}'$ — естественное вложение $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}'$; тогда ι непрерывно, если $\mathscr{S}$ наделено топологией $\sigma(\mathscr{S}, \mathscr{S}')$, а $\mathscr{S}'$ наделено топологией $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$.
(d) Докажите, что $\iota' = \iota$!
(e) Покажите, что $\iota(\mathscr{S})$ плотно в $\mathscr{S}'$ в топологиях $\tau(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ и $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$.

20. Пусть X — локально выпуклое пространство с сопряженным $X^* = Y$.
(a) Докажите, что любое замкнутое подпространство в X $\sigma(X, X^*)$-замкнуто в нем.
(b) Докажите, что все топологии, согласованные с двойственностью между X и Y, обладают одинаковыми замкнутыми подпространствами.
(c) Пусть C — замкнутое выпуклое подмножество в X. Докажите, что C замкнуто в топологии $\sigma(X, X^*)$. [*Указание*: воспользуйтесь теоремой о разделении.]
(d) Докажите, что все топологии, согласованные с двойственностью между X и Y, обладают одинаковыми замкнутыми выпуклыми множествами.
(e) Верно ли предыдущее утверждение для компактных выпуклых множеств?

†*21.* Докажите непосредственно, что δ' (пример 5 § V.3) лежит в $\mathscr{S}'$. Докажите, что δ' не порождается никакой мерой.

†*22.* (a) Докажите, что
$$\lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{x - x_0}{(x - x_0)^2 + \varepsilon^2} = \mathscr{P}\left(\frac{1}{x - x_0}\right)$$
в слабой топологии на $\mathscr{S}'$.
(b) Пусть φ_n — последовательность ограниченных функций на $\mathbb{R}$, таких, что $\varphi_n \longrightarrow 0$ равномерно на компактах множества $\mathbb{R} \setminus \{x_0\}$, $\varphi_n(x) \geqslant 0$ и $\int \varphi_n(x)\,dx = c$ не зависит от n. Докажите, что $\varphi_n \longrightarrow c\delta(x - x_0)$ в топологии $\mathscr{S}'$.
(c) Докажите, что
$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{(x - x_0)^2 + \varepsilon^2} = \pi\delta(x - x_0).$$
(d) Докажите формулу (V.4).

†*23.* (a) Пусть $F \in O_M$. Докажите, что $f \mapsto Ff$ — ограниченное отображение $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$.
(b) Пусть F — измеримая функция, такая, что $Ff \in \mathscr{S}$ для всех $f \in \mathscr{S}$. Докажите, что $F \in C^\infty$.
(c) Докажите, что $F \in O_M$, если отображение $f \mapsto Ff$ непрерывно.

24. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R})$ и $|T(f)| \leqslant C \sum_{\alpha, \beta = 0}^{n} \left\| x^\alpha \left(\frac{d}{dx}\right)^\beta f \right\|_\infty$. Отобразим $\mathscr{S}$ в $C_n(\mathbb{R}) \oplus \ldots \oplus C_n(\mathbb{R})$ ($(n+1)$ раз) с помощью функции $f \mapsto \langle f, f', \ldots, f^{(n)} \rangle$; здесь $C_n(\mathbb{R})$ — банахово пространство непрерывных функций f,

для которых $\sup \|x^\alpha f\|_\infty < \infty$ для $\alpha=1, \ldots, n$, с нормой $\|f\|^{(n)} = \sum\limits_{\alpha=0}^{n} \|x^\alpha f\|_\infty$.
С помощью теорем Хана — Банаха и Рисса — Маркова докажите, что T представимо в виде

$$Tf = \sum_{\beta=0}^{n} \int D^\beta f \, d\mu_\beta,$$

где $\mu_0, \ldots, \mu_n$ — комплексные меры полиномиального роста.

25. (a) Пусть μ — полиномиально ограниченная мера и $F(x) = \int\limits_0^x d\mu$; $G(x) = \int\limits_0^x F(y)\,dy$. Докажите, что в смысле обобщенных функций $\mu = G''$.

(b) С помощью задач 24 и 25a докажите теорему регулярности для $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$.

26. Подражая задачам 24 и 25, докажите теорему локальной регулярности для $\mathscr{D}'$: для заданных $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и компактного множества $C \subset \mathbb{R}^n$ существуют непрерывная функция F на C и α, такие, что $Tf = (-1)^\alpha \int F(x)(D^\alpha f)(x)\,dx$ для всех $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$ с носителем в C.

27. Пусть U_a — действующий в $\mathscr{S}'(\mathbb{R})$ оператор сдвига на a. Пусть d/dx — операция дифференцирования на $\mathscr{S}'$. Докажите, что $(U_a - 1)a^{-1}$ поточечно сходится в топологии $\sigma(\mathscr{S}', \mathscr{S})$ к d/dx.

†*28.* (a) Докажите, что $V(A)$, определенное операцией 4 в § V.3, совпадает с $(V(A)\varphi)(x) = \varphi(A^{-1}x)$, если $\varphi \in \mathscr{S}$ рассматривается как элемент $\mathscr{S}'$.
(b) Покажите, что носитель функции $\varphi \in \mathscr{S}$, рассматриваемой как распределение, совпадает с $\{x \mid \varphi(x) \neq 0\}$.

†*29.* (a) Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varphi(0) = 0$. Докажите, что существуют $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{S}$, для которых $0 \notin \operatorname{supp} \varphi_k$ при всех k, такие, что $\|x^\alpha(\varphi_k - \varphi)\|_\infty \longrightarrow 0$ при всех $\alpha \in I_+^n$.
(b) Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $(D^\beta\varphi)(0) = 0$ для всех $\beta \in I_+^n$ с $|\beta| \leq m$. Докажите, что существуют $\{\varphi_k\} \subset \mathscr{S}$, для которых $0 \notin \operatorname{supp} \varphi_k$ при всех k, такие, что $\|x^\alpha D^\beta(\varphi_k - \varphi)\|_\infty \longrightarrow 0$ при всех $\alpha \in I_+^n$ и β с $|\beta| \leq m$.
(c) Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и

$$|T(f)| \leq C \sum_{\substack{|\beta| \leq m \\ |\alpha| \leq n}} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty.$$

Предположим, что $\operatorname{supp} T = \{0\}$, и пусть $\varphi \in \mathscr{S}$ и $(D^\beta\varphi)(0) = 0$ для $|\beta| \leq m$. Докажите, что $T(\varphi) = 0$.
(d) Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяет требованию

$$|T(\cdot)| \leq C \sum_{\substack{|\beta| \leq m \\ |\alpha| \leq n}} \|x^\alpha D^\beta \cdot\|_\infty.$$

Пусть $\operatorname{supp} T = \{0\}$. Найдите постоянные $\{C_\beta\}_{|\beta| \leq m}$, такие, чтобы

$$T(\psi) = \sum_{|\beta| \leq m} (-1)^\beta C_\beta (D^\beta \psi)(0)$$

для всех $\psi \in \mathcal{S}$. [*Указание*: возьмите $\eta \in \mathcal{S}$, равную тождественно 1 вблизи 0, и положите

$$\varphi = \psi - \eta \sum_{|\beta| \leqslant m} \frac{x^\beta}{\beta!} (D^\beta \psi)(0).]$$

(e) Докажите теорему V.11.

30. Пусть $F \in O_M(\mathbb{R})$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$. Пусть $'$ обозначает дифференцирование в $\mathcal{S}'$. Используя определения умножения и $'$, докажите, что $(FT)' = F'T + FT'$.

31. Отображение S: $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ называют **локальным**, если $\operatorname{supp} S\varphi \subset \Omega$, когда $\operatorname{supp} \varphi \subset \Omega$. Отображение S: $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ называют **локальным**, если $\operatorname{supp} ST \subset \Omega$, когда $\operatorname{supp} T \subset \Omega$.
(a) Пусть S: $\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ локально. Докажите, что S': $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$ локально.
(b) Какие из операций 1—4 локальны?

**32.* Говорят, что порядок распределения $T \in \mathcal{S}'$ не превосходит n, если

$$|T(\varphi)| \leqslant C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|$$

при некоторых C и k. Говорят, что порядок распределения не превосходит n^-, если для некоторого фиксированного j и любого $D > 0$ существуют такие k и C, что

$$|T(\varphi)| \leqslant D \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant j \\ |\beta| = n}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \| + C \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant k \\ |\beta| \leqslant n-1}} \| x^\alpha D^\beta \varphi \|.$$

Мы говорим, что T имеет **порядок** n, если T есть распределение порядка, не превосходящего n, но не является распределением порядка, не превосходящего n^-. Аналогично, мы говорим, что T имеет **порядок** n^-, если T есть распределение порядка, не превосходящего n^-, но не является распределением порядка, не превосходящего $n-1$.
(a) Докажите, что перенормировки $(1/x)_{+;M}$ из примера 9 имеют порядок 1^-.
(b) Докажите, что любая другая перенормировка $(1/x)_+$ имеет порядок, не меньший 1.

**33.* Докажите, что на $L^p(\mathbb{R})$ $(1 < p < \infty)$ не всякая билинейная форма имеет вид $F(f, g) = \int F(x, y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ при некотором $F(x, y) \in L^q(\mathbb{R}^2)$. [*Указание*: если $p \geqslant 2$, пусть $F(f, g) = \int G(x) f(x) g(x)\, dx$ для некоторого $G \in L^r$, $1/r + 2/p = 1$; если $1 < p \leqslant 2$, пусть $F(f, g) = \int G(x-y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ с $G \in L^r$, $1/r = 2(1 - 1/p)$.]

Замечания. 1) Пример, данный в указании при $1 < p \leqslant 2$, требует применения неравенства Юнга, которое мы докажем в § IX.4.
2) Для $L^1(\mathbb{R})$ справедлива теорема о ядре, т. е. каждая билинейная форма на $L^1(\mathbb{R})$ имеет вид $F(f, g) = \int F(x, y) f(x) g(y)\, dx\, dy$ с некоторой функцией $F \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$. Интересное упражнение—доказать это исходя из теоремы Данфорда—Петтиса, которая гласит: пусть E—сепарабельное банахово пространство и T: $E \longrightarrow L^\infty(\mathbb{R})$; тогда существует измеримая функция g на $\mathbb{R}$ со значениями в E^*, такая, что $\sup_{x \in \mathbb{R}} \| g(x) \| = \| T \|$ и

$T(e)=\int [g(x)](e)\,dx$. Доказательство этой теоремы см. у Трева (ссылка в замечаниях к § V.3), стр. 469—473.

†*34*. Докажите, что раздельно непрерывная мультилинейная форма на $F_1\times\ldots\times F_n$ непрерывна, если все F_i суть пространства Фреше.

†*35*. Распространите доказательство теоремы о ядре, данное в дополнении к § V.3, на мультилинейные функционалы; точнее, докажите, что если $B(f_1, \ldots, f_k)$ — раздельно непрерывный k-линейный функционал на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_1})\times\ldots\times\mathcal{S}(\mathbb{R}^{n_k})$, то существует такое $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{n_1+\ldots+n_k})$, что

$$B(f_1, \ldots, f_k)=T(f_1\otimes\ldots\otimes f_k).$$

†*36*. Разберитесь в деталях доказательства леммы 2 в дополнении к § V.3.

†*37*. Закончите доказательство следствия 3 в дополнении к § V.3.

38. Определим множество $\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)=\{f\mid f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n$, лежащая со своими производными в $L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$. Наделим $\mathcal{D}_{L^\infty}(\mathbb{R}^n)$ полунормами $\{\|\cdot\|_{\alpha,\infty}\}$, где $\|f\|_{\alpha,\infty}=\|D^\alpha f\|_\infty$.
(a) Докажите, что $\mathcal{D}_{L^\infty}$ полно.
(b) Докажите, что $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ не замкнуто в $\mathcal{D}_{L^\infty}$, и найдите его замыкание.

39. Пусть $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)=\{f\mid f$ — бесконечно дифференцируемая функция на $\mathbb{R}^n\}$. Пусть для любого целого m и $\alpha\in I_+^n$

$$\|f\|_{(m),\alpha}=\sup_{|x|\leqslant m}|(D^\alpha f)(x)|.$$

Снабдим $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ полунормами $\{\|\cdot\|_{(m),\alpha}\mid \alpha\in I_+^n,\ m\in I_+\}$.
(a) Докажите, что $\mathcal{E}$ полно.
(b) Докажите, что естественное вложение $\iota:\mathcal{D}\subset\mathcal{E}$ непрерывно, так что естественным образом $\iota':\mathcal{E}'\subset\mathcal{D}'$.
(c) Докажите, что $T\in\mathcal{D}'$ принадлежит $\mathcal{E}'$ тогда и только тогда, когда T имеет компактный носитель.

40. Докажите, что естественное вложение $\mathcal{D}\subset\mathcal{S}$ непрерывно, и выведите отсюда, что $\mathcal{S}'\subset\mathcal{D}'$ естественным образом. Докажите, что $\mathcal{E}'\subset\mathcal{S}'$.

†*41*. Докажите часть (b) теоремы V.15.

42. Обобщив лемму 1 дополнения к § V.3, докажите, что семейства полунорм $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,\infty}\}$ и $\{\|\cdot\|_{\alpha,\beta,p}\}$ эквивалентны при любом фиксированном $1\leqslant p<\infty$, если $\|f\|_{\alpha,\beta,p}=\|x^\alpha D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$.

43. *(a) Докажите, что s_m и s_n изоморфны, т. е. существует непрерывная линейная биекция $T: s_m\to s_n$ с непрерывной обратной.
(b) Докажите, что $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{S}(\mathbb{R}^m)$ топологически изоморфны.

44. Докажите, что семейства $\{\|\cdot\|_\beta\}$ и $\{\|\cdot\|_{\beta;p}\}$ норм на s_m эквивалентны, если $\|a\|_{\beta;p}^p=\sum_\alpha(\alpha+1)^\beta|a_\alpha|^p$.

45. Пусть X — строгий индуктивный предел последовательности X_n, в которой каждое X_n — собственное замкнутое подпространство в X. Предположим, что $\{U_n\}$ — счетное убывающее семейство окрестностей нуля. Возьмем $x_n\in U_n\setminus X_n$.
(a) Докажите, что $\{x_n\}$ не ограничена.

(b) Покажите, что $\{x_n\}$ была бы ограничена, если бы U_n составляли базу окрестностей.
(c) Выведите отсюда, что X неметризуемо.

†46. (a) Предположим, что X — строгий индуктивный предел пространств X_n. Предположим, что $\{Y_n\}$ — возрастающее семейство подпространств из X, такое, что для любого n существует N, при котором $X_n \subset Y_N$. Докажите, что X — строгий индуктивный предел Y_n.
(b) Пусть $K \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, причем K компактно, а Ω открыто. Докажите, что если $\mathscr{D}_\Omega$ наделено топологией, задаваемой некоторым семейством $\{K_n\}$, то сужение этой топологии на $C_0^\infty(K)$ задается нормами $\|D^\alpha f\|_\infty$.
(c) Докажите, что топология на $\mathscr{D}_\Omega$ не зависит от выбора возрастающего семейства K_n компактных множеств.

†47. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — координаты в $\mathbb{R}^n$. Мы говорим, что распределение $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$ или что T — функция $y_1, \ldots, y_k$, если для любого сдвига

$$U_{a_{k+1}, \ldots, a_n}: (y_1, \ldots, y_n) \mapsto (y_1, \ldots, y_k, y_{k+1}+a_{k+1}, \ldots, y_n+a_n)$$

имеем

$$U_{a_{k+1}, \ldots, a_n} T = T.$$

(a) Пусть F — измеримая функция на $\mathbb{R}^k$, которая локально принадлежит L^1. Пусть T — распределение, порождаемое функцией $F(y_1, \ldots, y_k)$ на $\mathbb{R}^n$. Докажите, что T не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$.
(b) Пусть T не зависит от $y_{k+1}, \ldots, y_n$. Докажите, что $(\partial T/\partial y_i) = 0$ при $i = k+1, \ldots, n$. [*Указание*: см. задачу 27.]
(c) Пусть T — распределение в $\mathscr{D}(\mathbb{R}^2)$, которое есть функция только $x - ct = y_1$. Докажите, что это определение не зависит от того, как выбрана вторая независимая координата y_2.
(d) Пусть T такое же, как в (c). Докажите, что $(\partial T/\partial t) = -c(\partial T/\partial x)$ и что $\partial T/\partial t$ — тоже распределение, зависящее только от $x - ct$.
(e) Выведите отсюда, что

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} T - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} T = 0.$$

†48. Пусть T и S — коммутирующие отображения метрического пространства в себя. Пусть $f_T = \{x \mid Tx = x\}$.
(a) Докажите, что $Sx \in f_T$, если $x \in f_T$.
(b) Предположим, что T — строго сжимающее отображение. Докажите, что S имеет неподвижную точку.
(c) Пусть T^n — строго сжимающее отображение при некотором n. Докажите, что T имеет единственную неподвижную точку.

†49. Пусть $X = \{\{x_n\} \in l_2 \mid |x_n| \leqslant 1/3^n\}$.
(a) Докажите, что X — компактное выпуклое подмножество l_2.
(b) Пусть $f: X \to \mathbb{C}$ задано равенством $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_n$. Докажите, что f — непрерывное аффинное линейное отображение на X.
(c) Докажите, что f не имеет непрерывных продолжений на все пространство l_2.

50. Пусть G — группа с абелевой подгруппой N, такой, что G/N абелева (например, семейство вращений и переносов в $\mathbb{R}^2$). Пусть C — компактное выпуклое подмножество локально выпуклого пространства X. Пусть для

каждого $g \in G$ задано T_g — аффинное линейное отображение C в C, такое, что $T_gT_h = T_{gh}$.

(a) Положим $C_N = \{x \in C \mid T_n x = x$ для всех $n \in N\}$. Докажите, что C_N компактно, выпукло и непусто.

(b) Предположим, что g_1, g_2 лежат в одном смежном классе в G/N. Докажите, что $T_{g_1} \restriction C_N = T_{g_2} \restriction C_N$.

(c) Докажите, что существует такое $x \in C$, что $T_g x = x$ для всех $g \in G$.

51. Дайте прямое доказательство теоремы V.21.

52. Локально выпуклое пространство X называется **пространством Макки**, или **борнологическим пространством**, если для любого локально выпуклого пространства Y любое линейное отображение T: $X \longrightarrow Y$, переводящее ограниченные множества в ограниченные, непрерывно.

(a) Пусть X — пространство Макки. Докажите, что оно имеет топологию Макки $\tau(X, X^*)$. [*Указание*: рассмотрите id: $X \longrightarrow \langle X, \tau\rangle$.]

(b) Пусть $x_n \longrightarrow 0$ в метризуемом локально выпуклом пространстве. Докажите, что существует $\{\rho_n\} \subset \mathbb{R}$, $\rho_n \longrightarrow \infty$, такая, что $\rho_n x_n \longrightarrow 0$. [*Указание*. Пусть U_n — счетная база окрестностей, $U_{n+1} \subset U_n$. Выберем такое n_k, что из $n \geqslant n_k$ следует $x_n \in \frac{1}{k} U_k$. Положим $\rho_n = k$, если $n_k \leqslant n < n_{k+1}$.]

(c) Докажите, что любое метризуемое локально выпуклое пространство есть пространство Макки. [*Указание:* используйте (b) и учтите ограниченность сходящейся последовательности.]

(d) Докажите, что строгий индуктивный предел $X = \bigcup X_n$, где X_n — собственные замкнутые подпространства X_{n+1}, будет пространством Макки, если каждое X_n — пространство Макки.

(e) Докажите, что строгий индуктивный предел пространств Фреше есть пространство Макки.

(f) Докажите, что естественные топологии на $\mathcal{S}$ и $\mathcal{D}$ суть топологии Макки.

53. Пусть E — локально выпуклое пространство. Определим **естественную топологию** $\eta(E^{**}, E)$ на E^{**} следующим образом. Пусть $\mathcal{U}$ — семейство всех уравновешенных выпуклых окрестностей нуля в E. Для каждого $U \in \mathcal{U}$ пусть $\tilde{U}$ есть E^{**}-поляра множества $U^\circ \subset E^*$. Множество всех $\tilde{U}$ порождает естественную топологию. Докажите, что:

(a) Естественная топология слабее топологии $\beta(E^{**}, E^*)$. [*Указание:* каждое U° ограничено.]

(b) Сужение естественной топологии с E^{**} на E совпадает с исходной топологией на E, т. е. отображение ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \eta\rangle$ непрерывно и открыто.

(c) Отображение, *обратное* к естественному вложению ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \eta\rangle$, действующее из $\operatorname{Ran}\rho$ в E, всегда непрерывно.

54. Пусть E — банахово пространство со *слабой* топологией. Докажите, что инъекция ρ: $E \longrightarrow \langle E^{**}, \beta\rangle$ *всегда* разрывна, если E бесконечномерно.

†*55.* Пусть $\langle E, F\rangle$ — дуальная пара. Докажите, что каждое $\sigma(E, F)$-замкнутое ограниченное множество в E $\sigma(E, F)$-компактно тогда и только тогда, когда топологии $\tau(F, E)$ и $\beta(F, E)$ на F совпадают.

**56.* (a) Пусть E — пространство Фреше. Докажите, что любое $\sigma(E^*, E)$-замкнутое ограниченное множество в E^* $\sigma(E^*, E)$-компактно. [*Указание:* подражайте доказательству теоремы Банаха — Алаоглу и в критическом месте воспользуйтесь принципом равномерной ограниченности.]

(b) Докажите (a), когда E — строгий индуктивный предел пространств Фреше.

†57. Объединив задачи 52 и 56 с теоремой V.25, докажите теорему V.24.

†58. Докажите лемму 3 в дополнении к § V.7.

59. Пусть $[-a, a] \subset \mathbb{R}$. Пусть $\varphi_n(x) = (2C)^{-1/2} \exp(\pi i n x/C)$; $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Предположим, что задана $f \in L^2[-a, a]$, и пусть $a_n = (\varphi_n, f)$. Докажите, что $f \in C_0^\infty[-a, a]$ тогда и только тогда, когда $n^k a_n \to 0$ для всех k (при $n \to \infty$). Найдите неравенства для норм, при помощи которых можно доказать, что s и $C_0^\infty[-a, a]$ изоморфны. Докажите, что замыкание $C_0^\infty[-a, a]$ лежит в $\mathcal{D}$.

60. (a) Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $C_0^\infty[-a, a]$. Подражая доказательству, приведенному в дополнении к § V.3, и используя задачу 59, докажите, что в $C_0^\infty([-a, a] \times [-a, a])^*$ существует T, для которого $B(f, g) = T(f \otimes g)$.

(b) Пусть $B(\cdot, \cdot)$ — раздельно непрерывный билинейный функционал на $\mathcal{D}_{\mathbb{R}}$. Докажите, что в $\mathcal{D}'_{\mathbb{R}^2}$ существует T, для которого $B(f, g) = T(f \otimes g)$.

61. Докажите, что $C_0^\infty(\mathbb{R})$ не пусто, т. е. постройте явную бесконечно дифференцируемую функцию с компактным носителем. [*Указание:* сначала покажите, что функция $f(x) = \chi_{(0, \infty)}(x) e^{-1/x}$ бесконечно дифференцируема; здесь $\chi_{(0, \infty)}$ — характеристическая функция интервала $(0, \infty)$.]