VI. ОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Я посетил также математическую школу, где учитель преподает по такому методу, какой едва ли возможно представить себе у нас в Европе. Каждая теорема с доказательством тщательно переписывается на тоненькой облатке чернилами, составленными из микстуры против головной боли. Ученик глотает облатку натощак и в течение следующих трех дней не ест ничего, кроме хлеба и воды. Когда облатка переваривается, микстура поднимается в его мозг, принося с собой туда же теорему.

ДЖОНАТАН СВИФТ, «ПУТЕШЕСТВИЯ ГУЛЛИВЕРА»[1])

VI.1. Топологии на множестве ограниченных операторов

Мы уже ввели банахово пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ операторов из одного банахова пространства в другое. В этой главе мы изучаем его более подробно. Особо отметим случай, с которым в дальнейшем мы будем сталкиваться наиболее часто, именно $\mathcal{L}(\mathcal{H}, \mathcal{H}) \equiv \mathcal{L}(\mathcal{H})$, где $\mathcal{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Теорема III.2 показывает, что $\mathcal{L}(X, Y)$—банахово пространство с нормой

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|_Y}{\|x\|_X}.$$

Индуцированная ею топология на $\mathcal{L}(X, Y)$ называется **равномерной операторной топологией** (или **топологией нормы**). В этой топологии отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ пространства $\mathcal{L}(X, Y) \times \mathcal{L}(Y, Z)$ в $\mathcal{L}(X, Z)$ непрерывно по совокупности переменных.

Введем теперь на $\mathcal{L}(X, Y)$ еще две топологии: слабую и сильную операторные топологии. На $\mathcal{L}(X, Y)$ можно задать и другие интересные и полезные топологии, но мы отложим это до тех пор, пока они нам понадобятся (в III томе) (см., однако, обсуждение в конце § 6 и Замечания).

Сильная операторная топология—это слабейшая топология на $\mathcal{L}(X, Y)$, в которой отображения

$$E_x\colon \mathcal{L}(X, Y) \to Y,$$

заданные равенством $E_x(T) = Tx$, непрерывны для всех $x \in X$. База окрестностей нуля задается множествами вида

$$\{S \mid S \in \mathcal{L}(X, Y),\ \|Sx_i\|_Y < \varepsilon,\ i = 1, \ldots, n\},$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$—конечный набор элементов из X, а $\varepsilon > 0$. В этой топологии направленность операторов $\{T_\alpha\}$ сходится к оператору T (обозначается $T_\alpha \xrightarrow{s} T$) тогда и только тогда, когда

[1]) Изд-во «Художественная литература», М., 1967, стр. 219.—*Прим. ред.*

$\|T_\alpha x - Tx\| \to 0$ для всех $x \in X$. Если X, Y, Z бесконечномерны, то отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ непрерывно по каждой переменной, но не по их совокупиости (см. задачу 6a, b). Мы иногда обозначаем сильные пределы символом s-lim.

Слабая операторная топология на $\mathscr{L}(X, Y)$ — это слабейшая топология, в которой отображения

$$E_{x, l}: \mathscr{L}(X, Y) \to \mathbf{C},$$

заданные равенством $E_{x, l}(T) = l(Tx)$, непрерывны для всех $x \in X$ и $l \in Y^*$. База окрестностей нуля задается множествами вида

$$\{S \mid S \in \mathscr{L}(X, Y), \ |l_i(Tx_j)| < \varepsilon, \ i = 1, \ \ldots, \ n, \ j = 1, \ \ldots, \ m\},$$

где $\{x_i\}_{i=1}^n$ и $\{l_j\}_{j=1}^m$ — конечные семейства элементов из X и Y^* соответственно. Направленность $\{T_\alpha\}$ сходится к оператору T в слабой операторной топологии (обозначается $T_\alpha \xrightarrow{w} T$) тогда и только тогда, когда $|l(T_\alpha x) - l(Tx)| \to 0$ для каждого $l \in Y^*$ и $x \in X$. Отметим, что в случае $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ слабая сходимость $T_\gamma \xrightarrow{w} T$ в точности означает сходимость «матричных элементов» $(y, T_\gamma x)$ к (y, Tx). Если X, Y и Z бесконечномерны, то в слабой операторной топологии отображение $\langle A, B\rangle \mapsto BA$ непрерывно по каждой переменной, но не по совокупности (см. задачу 6c).

Замечание. Читателю не следует путать слабую операторную топологию на $\mathscr{L}(X, Y)$ со слабой топологией, заданной на $\mathscr{L}(X, Y)$ как на банаховом пространстве. Первая из них — это слабейшая топология, в которой непрерывны ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{L}(X, Y)$ вида $l(\cdot x)$ для всех $x \in X$ и $l \in Y^*$. Вторая — это слабейшая топология, в которой непрерывны *все* ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{L}(X, Y)$ (см. § VI.6).

Отметим, что слабая операторная топология слабее сильной операторной топологии, которая слабее равномерной операторной топологии. В общем случае слабая и сильная операторные топологии на $\mathscr{L}(X, Y)$ не удовлетворяют первой аксиоме счетности, и потому вопросы компактности, сходимости направленностей и секвенциальной сходимости достаточно сложны. Следующий простой пример демонстрирует различные топологии на $\mathscr{L}(l_2)$.

Пример. Рассмотрим ограниченные операторы на l_2:

(i) Определим T_n равенством

$$T_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = \left(\frac{1}{n}\xi_1, \frac{1}{n}\xi_2, \ldots\right).$$

Тогда $T_n \to 0$ равномерно.

(ii) Определим S_n равенством

$$S_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0,}_{n \text{ мест}} \xi_{n+1}, \xi_{n+2}, \ldots).$$

Тогда $S_n \to 0$ сильно, но не равномерно.

(iii) Определим W_n равенством

$$W_n(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\underbrace{0, \ldots, 0,}_{n \text{ мест}} \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда $W_n \to 0$ в слабой операторной топологии, но не в сильной и не в равномерной топологиях.

В случае гильбертова пространства иногда полезен следующий результат, представляющий собой красивое приложение теоремы о равномерной ограниченности.

Теорема VI.1. Пусть $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ — множество ограниченных операторов на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть T_n — *последовательность* ограниченных операторов, и предположим, что $(T_n x, y)$ сходится при $n \to \infty$ для каждых $x, y \in \mathscr{H}$. Тогда существует такой $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $T_n \xrightarrow{w} T$.

Доказательство. Начнем с демонстрации того, что $\sup\limits_n \| T_n x \| < \infty$ для каждого x. Поскольку $(T_n x, y)$ сходится для любого $x \in \mathscr{H}$, имеем

$$\sup_n |(T_n x, y)| < \infty.$$

Далее, $T_n x \in \mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ для каждого n, и так как $\sup\limits_n |(T_n x)(y)|_{\mathbb{C}} < \infty$, то из теоремы о равномерной ограниченности вытекает равномерная ограниченность операторных норм $T_n x$ как элементов в $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$. Но норма элемента $T_n x$ как оператора в $\mathscr{L}(\mathscr{H}, \mathbb{C})$ совпадает с его нормой в $\mathscr{H}$; таким образом, $\| T_n x \|_{\mathscr{H}}$ равномерно ограничены.

Теперь используем теорему о равномерной ограниченности еще раз. Так как

$$\sup_n \| T_n x \|_{\mathscr{H}} < \infty,$$

то

$$\sup_n \| T_n \|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} < \infty.$$

Положим $B(x, y) = \lim\limits_n (T_n x, y)$. Тогда легко проверить, что форма $B(x, y)$ полуторалинейна и

$$|B(x, y)| \leqslant \overline{\lim_n} |(T_n x, y)| \leqslant \|x\| \|y\| \left(\sup_n \| T_n \|\right).$$

Таким образом, $B(x, y)$—ограниченная полуторалинейная форма на $\mathscr{H}$, и потому в силу следствия леммы Рисса существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, для которого $B(x, y) = (Tx, y)$. Ясно, что $T_n \xrightarrow{w} T$. ∎

Если *последовательность* операторов T_n на гильбертовом пространстве такова, что $T_n x$ сходится для каждого $x \in \mathscr{H}$; то существует такой $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $T_n \xrightarrow{s} T$. В задаче 3 читателю предлагается доказать эту теорему и ее различные обобщения.

Пусть $T \in \mathscr{L}(X; Y)$. Множество векторов $x \in X$, для которых $Tx = 0$, называется **ядром** T и обозначается $\operatorname{Ker} T$. Множество векторов $y \in Y$, таких, что $y = Tx$ для какого-нибудь $x \in X$, называется **областью значений** T и обозначается $\operatorname{Ran} T$. Отметим, что и $\operatorname{Ker} T$, и $\operatorname{Ran} T$—подпространства, причем $\operatorname{Ker} T$ всегда замкнуто, но $\operatorname{Ran} T$ может и не быть замкнутым (задача 7).

VI.2. Сопряженные

В этом разделе мы определяем операторы, сопряженные к ограниченным операторам на банаховых и гильбертовых пространствах. С самого начала читатель должен иметь в виду, что гильбертов сопряженный оператора $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ не совпадает с его банаховым сопряженным, хотя и тесно с ним связан.

Определение. Пусть X и Y—банаховы пространства и T—ограниченный линейный оператор из X в Y. **Банаховым сопряженным** к T (обозначается T') называется ограниченный линейный оператор из Y^* в X^*, определяемый равенством

$$(T'l)(x) = l(Tx)$$

для всех $l \in Y^*$ и $x \in X$.

Пример. Пусть $X = l_1 = Y$, и пусть T—оператор правого сдвига

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда T': $l_\infty \to l_\infty$—это оператор, действующий так:

$$T'(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

В этом примере $\|T\| = 1 = \|T'\|$. На самом деле нормы T и T' равны всегда:

Теорема VI.2. Пусть X и Y—банаховы пространства. Тогда $T \mapsto T'$ изометрически изоморфно отображает $\mathscr{L}(X, Y)$ в $\mathscr{L}(Y^*, X^*)$.

Доказательство. Отображение $T \mapsto T'$ линейно. Тот факт, что T' ограничен и что это отображение—изометрия, следует из пря-