Таким образом, $B(x, y)$ — ограниченная полуторалинейная форма на $\mathscr{H}$, и потому в силу следствия леммы Рисса существует ограниченный оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, для которого $B(x, y) = (Tx, y)$. Ясно, что $T_n \xrightarrow{w} T$. ∎

Если *последовательность* операторов T_n на гильбертовом пространстве такова, что $T_n x$ сходится для каждого $x \in \mathscr{H}$; то существует такой $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $T_n \xrightarrow{s} T$. В задаче 3 читателю предлагается доказать эту теорему и ее различные обобщения.

Пусть $T \in \mathscr{L}(X; Y)$. Множество векторов $x \in X$, для которых $Tx = 0$, называется **ядром** T и обозначается $\operatorname{Ker} T$. Множество векторов $y \in Y$, таких, что $y = Tx$ для какого-нибудь $x \in X$, называется **областью значений** T и обозначается $\operatorname{Ran} T$. Отметим, что и $\operatorname{Ker} T$, и $\operatorname{Ran} T$ — подпространства, причем $\operatorname{Ker} T$ всегда замкнуто, но $\operatorname{Ran} T$ может и не быть замкнутым (задача 7).

VI.2. Сопряженные

В этом разделе мы определяем операторы, сопряженные к ограниченным операторам на банаховых и гильбертовых пространствах. С самого начала читатель должен иметь в виду, что гильбертов сопряженный оператора $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ не совпадает с его банаховым сопряженным, хотя и тесно с ним связан.

Определение. Пусть X и Y — банаховы пространства и T — ограниченный линейный оператор из X в Y. **Банаховым сопряженным** к T (обозначается T') называется ограниченный линейный оператор из Y^* в X^*, определяемый равенством

$$(T'l)(x) = l(Tx)$$

для всех $l \in Y^*$ и $x \in X$.

Пример. Пусть $X = l_1 = Y$, и пусть T — оператор правого сдвига

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Тогда T': $l_\infty \to l_\infty$ — это оператор, действующий так:

$$T'(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

В этом примере $\|T\| = 1 = \|T'\|$. На самом деле нормы T и T' равны всегда:

Теорема VI.2. Пусть X и Y — банаховы пространства. Тогда $T \mapsto T'$ изометрически изоморфно отображает $\mathscr{L}(X, Y)$ в $\mathscr{L}(Y^*, X^*)$.

Доказательство. Отображение $T \mapsto T'$ линейно. Тот факт, что T' ограничен и что это отображение — изометрия, следует из прямых вычислений:

$$\begin{aligned}\|T\|_{\mathscr{L}(X,\,Y)} &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\|Tx\|_Y = \\ &= \sup_{\|x\|\leqslant 1}\Big(\sup_{\|l\|\leqslant 1}|l(Tx)|\Big) = \qquad (l\in Y^*)\\ &= \sup_{\|l\|\leqslant 1}\Big(\sup_{\|x\|\leqslant 1}|(T'l)(x)|\Big) = \\ &= \sup_{\|l\|\leqslant 1}\|T'l\| = \|T'\|_{\mathscr{L}(Y^*,\,X^*)}.\end{aligned}$$

Второе равенство основано на следствии теоремы Хана—Банаха. ∎

Больше всего нас интересует случай, когда T—ограниченное линейное преобразование гильбертова пространства $\mathscr{H}$ в себя. Банахово сопряженное оператора T в этом случае является отображением $\mathscr{H}^*$ в $\mathscr{H}^*$. Пусть C: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}^*$—отображение, ставящее в соответствие каждому $y\in\mathscr{H}$ ограниченный линейный функционал $(y,\ \cdot)$ в $\mathscr{H}^*$. Отображение C есть *сопряженно-линейная* изометрия, которая в силу леммы Рисса сюръективна. Определим отображение T^*: $\mathscr{H}\to\mathscr{H}$ соотношением

$$T^* = C^{-1}T'C.$$

Тогда

$$(x,\ Ty) = (Cx)(Ty) = (T'Cx)(y) = (C^{-1}T'Cx,\ y) = (T^*x,\ y).$$

Отображение T^* называется **гильбертовым сопряженным** оператора T, но обычно мы будем называть его просто сопряженным оператором и обозначать T^* в отличие от T'. Отметим, что соответствие $T\mapsto T^*$ *сопряженно-линейно*, т. е. $\alpha T\mapsto\bar{\alpha}T^*$. Это получается из-за того, что C сопряженно-линейно. Суммируем свойства соответствия $T\mapsto T^*$.

Теорема VI.3. (a) $T\mapsto T^*$—сопряженно-линейный изометрический изоморфизм $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ на себя.

(b) $(TS)^* = S^*T^*$.

(c) $(T^*)^* = T$.

(d) Если T обладает ограниченным обратным T^{-1}, то T^* обладает ограниченным обратным и $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$.

(e) Соответствие $T\mapsto T^*$ всегда непрерывно в слабой и равномерной операторных топологиях, но в сильной операторной топологии оно непрерывно только тогда, когда $\mathscr{H}$ конечномерно.

(f) $\|T^*T\| = \|T\|^2$.

Доказательство. (a) следует из теоремы IV.1 и из того, что C—изометрия. (b) и (c) легко проверить. Далее, так как $T^{-1}T = I = TT^{-1}$, то из (b) вытекает, что

$$T^*(T^{-1})^* = I^* = I = I^* = (T^{-1})^*T^*,$$

что и доказывает (d).

Проверка непрерывности $T \mapsto T^*$ в слабой и равномерной операторных топологиях тривиальна. В случае $\mathscr{H} = l_2$ существует контрпример, показывающий, что $T \mapsto T^*$ не непрерывно в сильной операторной топологии. Общий бесконечномерный случай аналогичен. Пусть W_n—оператор правого сдвига в l_2 на n шагов. Тогда W_n слабо (но не сильно) сходится к нулю. Однако $W_n^* = S_n$ сходится к нулю сильно. Таким образом, $S_n \xrightarrow{s} 0$, но $S_n^* = W_n$ не сходится к нулю сильно.

(f) выводится из задачи 9 с помощью следующего соотношения:

$$\|T^*T\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} (T^*Tx, x) = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|Tx\|^2 = \|T\|^2. \blacksquare$$

Определение. Ограниченный оператор T на гильбертовом пространстве называется **самосопряженным**, если $T = T^*$.

Самосопряженные операторы играют важную роль в функциональном анализе и математической физике, и большую часть времени мы будем изучать именно их. Глава VII посвящена доказательству структурной теоремы для ограниченных самосопряженных операторов. В гл. VIII мы введем неограниченные самосопряженные операторы и продолжим их изучение в гл. X. Напомним читателю, что на $\mathbb{C}^n$ линейное преобразование самосопряжено тогда и только тогда, когда его матрица в любом ортонормированном базисе не меняется при отражении относительно диагонали, сопровождаемом комплексным сопряжением.

Важный класс операторов на гильбертовом пространстве образуют проекторы.

Определение. Если $P \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ и $P^2 = P$, то P называется **проектором.** Если, кроме того, $P = P^*$, то P называется **ортогональным проектором.**

Отметим, что область значений проектора—всегда замкнутое подпространство, на котором P действует как тождественный оператор. Если P еще и ортогонален, то он действует как нулевой оператор на $(\operatorname{Ran} P)^\perp$. Если $x = y + z$, где $y \in \operatorname{Ran} P$, а $z \in (\operatorname{Ran} P)^\perp$,—разложение, гарантируемое теоремой о проектировании, то $Px = y$. Такой оператор P называется ортогональным проектором на $\operatorname{Ran} P$. Таким образом, теорема о проектировании устанавливает взаимно однозначное соответствие между ортогональными проекторами и замкнутыми подпространствами. Поскольку ортогональные проекторы встречаются чаще, чем неортогональные, мы обычно используем слово проектор, имея в виду ортогональный проектор.