VI.3. Спектр

Если T — линейное преобразование на $\mathbf{C}^n$, то собственные значения T — это комплексные числа λ, для которых детерминант $\lambda I - T$ равен нулю. Множество таких λ называется спектром T. Оно может состоять не более чем из n точек, поскольку $\det(\lambda I - T)$ есть полином степени n. Если λ не есть собственное значение, то оператор $\lambda I - T$ имеет обратный, поскольку $\det(\lambda I - T) \neq 0$.

Спектральная теория операторов на бесконечномерных пространствах сложнее, интереснее и очень важна для понимания основных свойств самих операторов.

Определение. Пусть $T \in \mathscr{L}(X)$. Говорят, что комплексное число λ лежит в **резольвентном множестве** $\rho(T)$ оператора T, если $\lambda I - T$ есть биекция с ограниченным обратным. **Резольвентой** T в точке λ называют оператор $R_\lambda(T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Если $\lambda \notin \rho(T)$, то говорят, что λ лежит в **спектре** $\sigma(T)$ оператора T.

Отметим, что по теореме об обратном отображении оператор $\lambda I - T$ автоматически обладает обратным, если он биективен. Мы различаем два подмножества в спектре.

Определение. Пусть $T \in \mathscr{L}(X)$.

(a) Вектор $x \in X$, удовлетворяющий условию $Tx = \lambda x$ при некотором $\lambda \in \mathbf{C}$, называется **собственным вектором** T; число λ называется соответствующим **собственным значением**. Если λ — собственное значение, то $\lambda I - T$ не инъективен, так что λ лежит в спектре T. Множество всех собственных значений называется **точечным спектром** оператора T.

(b) Если λ не есть собственное значение и если $\operatorname{Ran}(\lambda I - T)$ не плотно в X, то говорят, что λ лежит в **остаточном спектре**.

В конце этого раздела мы приведем пример, иллюстрирующий спектры такого типа. Остаточный спектр выделяют по той причине, что у широкого класса операторов, например у самосопряженных операторов, он отсутствует (см. теорему VI.8).

Спектральный анализ операторов очень важен для математической физики. Например, в квантовой механике гамильтониан — это неограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Точечный спектр гамильтониана соответствует уровням энергии связанных состояний системы. Остальной спектр играет важную роль в теории рассеяния в системе (см. гл. XII).

Мы вскоре докажем, что резольвентное множество $\rho(T)$ открыто и что $R_\lambda(T)$ — аналитическая операторнозначная функция на $\rho(T)$. Этот факт позволяет использовать при изучении $R_\lambda(T)$ комплексный анализ и таким способом извлекать информацию о T. Начнем с краткого отступления о векторнозначных аналитических функциях.

Пусть X — банахово пространство, и пусть D — область комплексной плоскости, т. е. связное открытое подмножество в $\mathbb{C}$. Функция $x(\cdot)$, определенная на D, со значениями в X называется **сильно аналитической в** $z_0 \in D$, если в X существует предел отношения $(x(z_0+h)-x(z_0))/h$ при h, стремящемся к нулю в $\mathbb{C}$. Начав с такого определения, можно развить теорию векторнозначных аналитических функций, почти полностью аналогичную обычной теории; в частности, сильно аналитическая функция разлагается в сходящийся по норме ряд Тейлора. Мы не будем повторять здесь соответствующие построения; см. ссылки в Замечаниях. Обсудим только один важный момент. Существует другой естественный способ определения банаховозначных аналитических функций. Именно: функция $x(\cdot)$ на D со значениями в X называется **слабо аналитической**, если $l(x(\cdot))$ — комплекснозначная аналитическая функция на D для каждого $l \in X^*$. Хотя второе определение аналитичности выглядит a priori слабее первого, на самом деле эти определения эквивалентны, что мы сейчас докажем. Это очень важно, поскольку слабую аналитичность часто легче установить.

Лемма. Пусть X — банахово пространство. Тогда $\{x_n\}$ — последовательность Коши в том и только том случае, когда $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по $l \in X^*$, $\|l\| \leqslant 1$.

Доказательство. Если $\{x_n\}$ — последовательность Коши, то $|l(x_n)-l(x_m)| \leqslant \|x_n-x_m\|$ для всех l с $\|l\| \leqslant 1$, так что $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по всем l с $\|l\| \leqslant 1$. Обратно,

$$\|x_n-x_m\| = \sup_{\|l\| \leqslant 1} |l(x_n-x_m)|.$$

Следовательно, если $\{l(x_n)\}$ — последовательность Коши равномерно по всем l с $\|l\| \leqslant 1$, то $\{x_n\}$ — последовательность Коши. ∎

Теорема VI.4. Каждая слабо аналитическая функция сильно аналитична.

Доказательство. Пусть $x(\cdot)$ слабо аналитична на D со значениями в X. Пусть $z_0 \in D$, и пусть Γ — окружность в D, содержащая z_0 и окружающая область, лежащую в D. Если $l \in X^*$, то $l(x(z))$ аналитична и

$$l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz} l(x(z_0)) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \left[\frac{1}{h}\left(\frac{1}{z-(z_0+h)} - \frac{1}{z-z_0}\right) - \frac{1}{(z-z_0)^2}\right] l(x(z))\, dz.$$

Поскольку $l(x(z))$ непрерывна на Γ и Γ компактна, $|l(x(z))| \leqslant C_l$ для всех $z \in \Gamma$. Рассматривая $x(z)$ как семейство отображений $x(z)\colon X^* \to \mathbf{C}$, легко понять, что $x(z)$ поточечно ограничены на каждом l и потому, в силу теоремы о равномерной ограниченности, $\sup_{z \in \Gamma} \|x(z)\| \leqslant C < \infty$. Таким образом,

$$\left| l\left(\frac{x(z_0+h)-x(z_0)}{h}\right) - \frac{d}{dz} l(x(z_0)) \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \|l\| \left(\sup_{z\in\Gamma} \|x(z)\|\right) \oint_\Gamma \left| \frac{1}{(z-(z_0+h))(z-z_0)} - \frac{1}{(z-z_0)^2} \right| dz.$$

Эта оценка показывает, что $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ есть последовательность Коши равномерно для всех l с $\|l\| \leqslant 1$. В силу леммы, $[x(z_0+h)-x(z_0)]/h$ сходится в X, что и доказывает сильную аналитичность $x(\cdot)$. ∎

Теперь докажем обещанную теорему о резольвенте.

Теорема VI.5. Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\rho(T)$ — открытое подмножество в $\mathbf{C}$ и $R_\lambda(T)$ — аналитическая $\mathscr{L}(X)$-значная функция на каждой компоненте (максимальном связном подмножестве) $\rho(T)$. Для любых двух точек $\lambda, \mu \in \rho(T)$ операторы $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют и

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu-\lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T). \tag{VI.1}$$

Доказательство. Начнем со следующего формального вычисления, временно игнорируя вопросы сходимости. Пусть $\lambda_0 \in \rho(T)$. Имеем

$$\frac{1}{\lambda-T} = \frac{1}{\lambda-\lambda_0+(\lambda_0-T)} = \frac{1}{\lambda_0-T}\,\frac{1}{1-\left(\dfrac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0-T}\right)} =$$
$$= \frac{1}{\lambda_0-T}\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda_0-\lambda}{\lambda_0-T}\right)^n\right].$$

Это наталкивает на мысль определить

$$\tilde{R}_\lambda(T) = R_{\lambda_0}(T)\left\{I + \sum_{n=1}^{\infty}(\lambda_0-\lambda)^n [R_{\lambda_0}(T)]^n\right\}.$$

Поскольку

$$\|[R_{\lambda_0}(T)]^n\| \leqslant \|R_{\lambda_0}(T)\|^n,$$

ряд в правой части сходится в равномерной операторной топологии, если

$$|\lambda-\lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}.$$

Для таких λ отображение $\tilde{R}_\lambda(T)$ корректно определено, и легко проверить, что

$$(\lambda I - T)\tilde{R}_\lambda(T) = I = \tilde{R}_\lambda(T)(\lambda I - T).$$

Это доказывает, что $\lambda \in \rho(T)$, если $|\lambda - \lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(T)\|^{-1}$, и что $\tilde{R}_\lambda(T) = R_\lambda(T)$. Таким образом, $\rho(T)$ открыто. Поскольку $R_\lambda(T)$ разлагается в степенной ряд, она аналитична.

Соотношение

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = R_\lambda(T)(\mu I - T)R_\mu(T) - R_\lambda(T)(\lambda I - T)R_\mu(T)$$

доказывает (VI.1). Перестановка μ и λ показывает, что $R_\lambda(T)$ и $R_\mu(T)$ коммутируют. ∎

Уравнение (VI.1) называют **первой резольвентной формулой.** Красивый пример использования комплексно-аналитических методов дает доказательство такого следствия:

Следствие. Пусть X — банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда спектр T не пуст.

Доказательство. Формально

$$\frac{1}{\lambda - T} = \frac{1}{\lambda}\,\frac{1}{1 - T/\lambda} = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right),$$

откуда для больших $|\lambda|$ получаем

$$R_\lambda(T) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{T}{\lambda}\right)^n\right). \qquad \text{(VI.2)}$$

Если $|\lambda| > \|T\|$, то ряд в правой части сходится по норме, и легко убедиться, что для таких λ его сумма на самом деле обратна $(\lambda I - T)$. Таким образом, $\|R_\lambda(T)\| \to 0$ при $|\lambda| \to \infty$. Если бы $\sigma(T)$ было пустым, $R_\lambda(T)$ была бы целой ограниченной аналитической функцией. По теореме Лиувилля $R_\lambda(T)$ тогда была бы нулем, что приводит к противоречию. Итак, $\sigma(T)$ не пусто. ∎

Ряд (VI.2) называется **рядом Неймана** для $R_\lambda(T)$. Доказательство следствия показывает, что $\sigma(T)$ содержится в замкнутом круге радиуса $\|T\|$. В действительности о $\sigma(T)$ можно сказать больше.

Определение. Величина

$$r(T) = \sup_{\lambda \in \sigma(T)} |\lambda|$$

называется **спектральным радиусом** оператора T.

Теорема VI.6. Пусть X—банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $r(T)$. Если X—гильбертово пространство и A—самосопряженный оператор, то $r(A) = \|A\|$.

Доказательство. Читатель может проверить, искусно следуя соображениям субаддитивности, приведенным в задаче 11, что $\lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует. Решающее место доказательства этой теоремы—установить, что радиус сходимости разложения Лорана для $R_\lambda(T)$ около ∞ есть как раз $r(T)^{-1}$. Прежде всего отметим, что этот радиус сходимости не может быть меньше $r(T)^{-1}$, поскольку мы доказали, что $R_\lambda(T)$ аналитична на $\rho(T)$ и $\{\lambda \mid |\lambda| > r(T)\} \subset \rho(T)$. С другой стороны, ряд (VI.2) представляет собой разложение Лорана около ∞, и мы уже видели, что там, где он сходится абсолютно, $R_\lambda(T)$ существует. Но так как ряд Лорана абсолютно сходится внутри своего круга сходимости, можно заключить, что радиус сходимости не может быть больше $r(T)^{-1}$. Равенство $r(T) = \lim\limits_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}$ следует из векторного варианта теоремы Адамара, которая утверждает, что радиус сходимости ряда (VI.2) есть величина, обратная

$$\overline{\lim_{n}} \|T^n\|^{1/n} = \lim_{n \to \infty} \|T^n\|^{1/n}.$$

Наконец, если X—гильбертово пространство и оператор A самосопряжен, то $\|A\|^2 = \|A^2\|$ в силу пункта (f) теоремы VI.3. Это дает $\|A^{2^n}\| = \|A\|^{2^n}$, так что

$$r(A) = \lim_{k \to \infty} \|A^k\|^{1/k} = \lim_{n \to \infty} \|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|. \ \blacksquare$$

При определении спектра иногда полезна следующая

Теорема VI.7 (Филлипс). Пусть X—банахово пространство, $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда $\sigma(T) = \sigma(T')$ и $R_\lambda(T') = R_\lambda(T)'$. Если $\mathscr{H}$—гильбертово пространство, то $\sigma(T^*) = \{\lambda \mid \bar{\lambda} \in \sigma(T)\}$ и $R_{\bar{\lambda}}(T^*) = R_\lambda(T)^*$.

Заметим, что утверждение, относящееся к гильбертову пространству, следует из пункта (d) теоремы VI.3.

Рассмотрим теперь подробно пример, иллюстрирующий различные типы спектров.

Пример. Пусть T—оператор в l_1, действующий так:

$$T(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (\xi_2, \xi_3, \ldots).$$

Его сопряженный T' действует в l_∞ так:

$$T'(\xi_1, \xi_2, \ldots) = (0, \xi_1, \xi_2, \ldots).$$

Сначала заметим, что $\|T\| = \|T'\| = 1$, так что все λ с $|\lambda| > 1$ лежат в $\rho(T)$ и $\rho(T')$. Предположим, что $|\lambda| < 1$. Тогда вектор $x_\lambda = (1, \lambda, \lambda^2, \ldots) \in l_1$ удовлетворяет уравнению $(\lambda I - T)x_\lambda = 0$. Значит, все такие λ принадлежат точечному спектру оператора T. Поскольку спектр — замкнутое множество, $\sigma(T) = \{\lambda \mid |\lambda| \leqslant 1\}$. По теореме VI.7 это множество есть спектр оператора T'.

Мы хотим показать, что T' точечного спектра не имеет. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty \in l_\infty$ и $(\lambda I - T')\{\xi_n\} = 0$. Тогда

$$\begin{gathered} \lambda\xi_0 = 0, \\ \lambda\xi_1 - \xi_0 = 0, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

Все эти уравнения вместе показывают, что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = 0$, так что $\lambda I - T'$ — взаимно однозначное отображение и T' не имеет точечного спектра. Предположим теперь, что $|\lambda| < 1$. Тогда для всех $L \in l_\infty$

$$[(\lambda I - T')L](x_\lambda) = L((\lambda I - T)x_\lambda) = 0,$$

где $x_\lambda \in l_1$ — собственный вектор, отвечающий собственному значению λ. В силу теоремы Хана — Банаха в l_∞ существует линейный функционал, не обращающийся в нуль на x_λ, так что область значений оператора $\lambda I - T'$ не плотна. Следовательно, $\{\lambda \mid |\lambda| < 1\}$ — остаточный спектр оператора T'.

Остается рассмотреть границу $|\lambda| = 1$. Пусть $|\lambda| = 1$ и $(\lambda I - T)\{\xi_n\} = 0$ для некоторой последовательности $\{\xi_n\} \in l_1$. Тогда

$$\begin{gathered} \xi_1 = \lambda\xi_0, \\ \xi_2 = \lambda\xi_1, \\ \cdots\cdots \end{gathered}$$

так что $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty = \xi_0\{1, \lambda, \lambda^2, \ldots\}$ не лежит в l_1. Следовательно, λ не принадлежит точечному спектру. Если бы область значений $\lambda I - T$ была не плотна, в l_∞ существовал бы ненулевой L, такой, что $L[(\lambda I - T)x] = 0$ для всех $x \in l_1$. Но тогда $[(\lambda I - T')L](x) = 0$, что означало бы, что λ лежит в точечном спектре T', которого, как мы доказали, нет. Следовательно, $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ не лежит ни в точечном, ни в остаточном спектре T.

Наконец, докажем, что $\{\lambda \mid |\lambda| = 1\}$ принадлежит остаточному спектру T', явно найдя открытый шар, не пересекающийся с

$\operatorname{Ran}(\lambda I - T')$. Если $a = \{a_n\}$ и $b = \{b_n\} \in l_\infty$ и $a = (\lambda I - T')b$, то

$$a_0 = \lambda b_0,$$
$$\vdots$$
$$a_n = \lambda b_n - b_{n-1},$$

так что $b_n = (\bar{\lambda})^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m a_m$. Пусть $c = \{c_n\}$, где $c_n = \bar{\lambda}^n$, и предположим, что $d \in l_\infty$ и $\|d - c\|_\infty \leqslant 1/2$. Тогда

$$\operatorname{Re}\{\lambda^n d_n\} \geqslant \operatorname{Re}\{\lambda^n c_n\} - \|d - c\|_\infty \geqslant 1/2.$$

Таким образом, если $(\lambda - T')e = d$ при некотором $e \in l_\infty$, то, поскольку

$$e_n = (\bar{\lambda})^{n+1} \sum_{m=0}^{n} \lambda^m d_m,$$

$|e_n| \geqslant n/2$, что невозможно. Следовательно, $\operatorname{Ran}(\lambda I - T')$ не пересекает шар радиуса $1/2$ с центром в c, так что λ лежит в остаточном спектре. В итоге получаем следующую картину:

Оператор	Спектр	Точечный спектр	Остаточный спектр
T	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\lvert\lambda\rvert < 1$	$\varnothing$
T'	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$	$\varnothing$	$\lvert\lambda\rvert \leqslant 1$

Точно так же, как в рассмотренном примере, можно доказать общее

Предложение. Пусть X — банахово пространство и $T \in \mathscr{L}(X)$. Тогда

(a) если λ лежит в остаточном спектре T, то λ лежит в точечном спектре T';

(b) если λ лежит в точечном спектре T, то λ лежит либо в точечном, либо в остаточном спектре T'.

Наконец, имеет место

Теорема VI.8. Пусть T — самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда

(a) T не имеет остаточного спектра;

(b) $\sigma(T)$ — подмножество в $\mathbb{R}$;

(c) собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям T, ортогональны.

Доказательство. (a) следует из последнего предложения и того, что точечный и остаточный спектры не пересекаются по определению. Если λ и μ вещественны, то

$$\|[A - (\lambda + i\mu)]x\|^2 = (x, (A - \lambda + i\mu)(A - \lambda - i\mu)x) =$$
$$= \|(A - \lambda)x\|^2 + \mu^2 \|x\|^2.$$

Таким образом, если $\mu \neq 0$, то $\|(A-(\lambda+i\mu))x\| \geqslant |\mu|\|x\|$. Это означает, что $A-(\lambda+i\mu)$ — инъекция, обладающая ограниченным обратным, заданным на области значений, которая замкнута. Поскольку A не имеет остаточного спектра, $\operatorname{Ran} A = \mathscr{H}$. Следовательно, $(\lambda+i\mu) \in \rho(T)$, если $\mu \neq 0$, так что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ и (b) доказано. Легкое доказательство (c) оставляем в качестве упражнения (задача 8). ∎

VI.4. Положительные операторы и полярное разложение

Мы хотим доказать существование специального разложения операторов на *гильбертовом пространстве*, аналогичного представлению $z=|z|e^{i\arg z}$ для комплексных чисел. Для этого мы должны прежде всего описать подходящий аналог положительных чисел.

Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **положительным**, если $(Bx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Мы пишем $B \geqslant 0$, если B положителен, и $A \geqslant B$, если $A-B \geqslant 0$.

Каждый ограниченный положительный оператор на *комплексном* гильбертовом пространстве самосопряжен. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $(x, Ax)=\overline{(x, Ax)}=(Ax, x)$, если (Ax, x) принимает только вещественные значения. В силу поляризационного тождества (задача 4, гл. II), $(Ax, y)=(x, Ay)$, если $(Ax, x)=(x, Ax)$ для всех x. Итак, если A положителен, то он самосопряжен. В случае вещественного гильбертова пространства это неверно, потому что в нем, зная (x, Ax) при всех x, нельзя восстановить (x, Ay).

Для любого $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ имеем $A^*A \geqslant 0$, поскольку $(A^*Ax, x)=$ $=\|Ax\|^2 \geqslant 0$. По аналогии с формулой $|z|=\sqrt{\bar{z}z}$ мы хотели бы определить $|A|$ как $\sqrt{A^*A}$. Чтобы сделать это, надо показать, что из положительных операторов можно извлекать квадратные корни. Начнем с такой леммы:

Лемма. Разложение функции $\sqrt{1-z}$ в степенной ряд около нуля сходится абсолютно для всех комплексных чисел z, удовлетворяющих неравенству $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{1-z}=1+c_1z+c_2z^2+\dots$ — такое разложение. Так как функция $\sqrt{1-z}$ аналитична при $|z|<1$, ряд сходится в этой области абсолютно. Далее, производные функции $\sqrt{1-z}$ в нуле все отрицательны, поэтому c_i отрицательны при