Таким образом, если $\mu \neq 0$, то $\|(A-(\lambda+i\mu))x\| \geqslant |\mu| \|x\|$. Это означает, что $A-(\lambda+i\mu)$ — инъекция, обладающая ограниченным обратным, заданным на области значений, которая замкнута. Поскольку A не имеет остаточного спектра, $\operatorname{Ran} A = \mathscr{H}$. Следовательно, $(\lambda+i\mu) \in \rho(T)$, если $\mu \neq 0$, так что $\sigma(T) \subset \mathbb{R}$ и (b) доказано. Легкое доказательство (c) оставляем в качестве упражнения (задача 8). ∎

VI.4. Положительные операторы и полярное разложение

Мы хотим доказать существование специального разложения операторов на *гильбертовом пространстве*, аналогичного представлению $z = |z| e^{i \arg z}$ для комплексных чисел. Для этого мы должны прежде всего описать подходящий аналог положительных чисел.

Определение. Пусть $\mathscr{H}$ — гильбертово пространство. Оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **положительным**, если $(Bx, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Мы пишем $B \geqslant 0$, если B положителен, и $A \geqslant B$, если $A - B \geqslant 0$.

Каждый ограниченный положительный оператор на *комплексном* гильбертовом пространстве самосопряжен. Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $(x, Ax) = \overline{(x, Ax)} = (Ax, x)$, если (Ax, x) принимает только вещественные значения. В силу поляризационного тождества (задача 4, гл. II), $(Ax, y) = (x, Ay)$, если $(Ax, x) = (x, Ax)$ для всех x. Итак, если A положителен, то он самосопряжен. В случае вещественного гильбертова пространства это неверно, потому что в нем, зная (x, Ax) при всех x, нельзя восстановить (x, Ay).

Для любого $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ имеем $A^*A \geqslant 0$, поскольку $(A^*Ax, x) = \|Ax\|^2 \geqslant 0$. По аналогии с формулой $|z| = \sqrt{\bar{z}z}$ мы хотели бы определить $|A|$ как $\sqrt{A^*A}$. Чтобы сделать это, надо показать, что из положительных операторов можно извлекать квадратные корни. Начнем с такой леммы:

Лемма. Разложение функции $\sqrt{1-z}$ в степенной ряд около нуля сходится абсолютно для всех комплексных чисел z, удовлетворяющих неравенству $|z| \leqslant 1$.

Доказательство. Пусть $\sqrt{1-z} = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots$ — такое разложение. Так как функция $\sqrt{1-z}$ аналитична при $|z| < 1$, ряд сходится в этой области абсолютно. Далее, производные функции $\sqrt{1-z}$ в нуле все отрицательны, поэтому c_i отрицательны при

$i \geqslant 1$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{N} |c_n| = 2 - \sum_{n=0}^{N} c_n = 2 - \lim_{x \to 1-} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \leqslant 2 - \lim_{x \to 1-} \sqrt{1-x} = 2,$$

где $\lim\limits_{x \to 1-}$ означает предел при стремлении x к единице снизу. Поскольку это справедливо для всех N, имеем $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| \leqslant 2$, что доказывает абсолютную сходимость при $|z|=1$. ∎

Теорема VI.9 (лемма о квадратном корне). Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ и $A \geqslant 0$. Тогда существует единственный оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой, что $B \geqslant 0$ и $B^2 = A$. Более того, B коммутирует с любым ограниченным оператором, коммутирующим с A.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда $\|A\| \leqslant 1$. Поскольку

$$\|I - A\| = \sup_{\|\varphi\|=1} |((I-A)\varphi, \varphi)| \leqslant 1,$$

из леммы следует, что ряд $I + c_1(I-A) + c_2(I-A)^2 + \ldots$ сходится по норме к некоторому оператору B. В силу абсолютной сходимости, можно возвести этот ряд в квадрат и перегруппировать его члены так, чтобы получилось $B^2 = A$. Более того, так как $0 \leqslant I - A \leqslant I$, то $0 \leqslant (\varphi, (I-A)^n \varphi) \leqslant 1$ для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ с $\|\varphi\| = 1$. Следовательно,

$$(\varphi, B\varphi) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n (\varphi, (I-A)^n \varphi) \geqslant 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \geqslant 0,$$

где использован тот факт, что $c_n < 0$, и оценка, приведенная в лемме. Таким образом, $B \geqslant 0$. В силу абсолютной сходимости ряда для B, он коммутирует с любым оператором, коммутирующим с A.

Предположим теперь, что существует такой B', что $B' \geqslant 0$ и $B'^2 = A$. Тогда, ввиду того что

$$B'A = (B')^3 = AB',$$

B' коммутирует с A и, следовательно, с B. Значит,

$$(B-B')B(B-B') + (B-B')B'(B-B') = (B^2 - B'^2)(B-B') = 0. \tag{VI.3}$$

Поскольку оба члена в левой части (VI.3) положительны, они оба должны равняться нулю, так что их разность $(B-B')^3 = 0$. Так как $B - B'$ — самосопряженный оператор, $\|B-B'\|^4 = \|(B-B')^4\| = 0$, и потому $B - B' = 0$. ∎

Теперь мы готовы определить $|A|$.

Определение. Пусть $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Тогда $|A| = \sqrt{A^*A}$ называется абсолютной величиной оператора A.

Читателю следует остерегаться эмоций, вызываемых другими значениями символа $|\cdot|$. В то время как равенство $|\lambda A| = |\lambda||A|$ справедливо для всех $\lambda \in \mathbb{C}$, в общем случае *не верно*, что $|AB| = |A||B|$ или что $|A| = |A^*|$. Более того, в общем случае неверно, что $|A+B| \leqslant |A| + |B|$ (задача 16). Действительно, в то время как отображение $|\cdot|$ непрерывно по норме (см. задачу 15), оно не всегда удовлетворяет условию Липшица, т. е. не всегда $\| |A| - |B| \| \leqslant c \|A - B\|$ при некоторой постоянной c (см. задачу 17).

Найти аналог комплексных чисел, равных по модулю единице, несколько сложнее. На первый взгляд можно было бы ожидать, что для этого вполне подойдут унитарные операторы, но следующий пример показывает, что это не так.

Пример. Пусть A — оператор правого сдвига в l_2. Тогда $|A| = \sqrt{A^*A} = I$, так что если мы запишем $A = U|A|$, то мы должны получить $U = A$. Однако A не может быть унитарным, поскольку вектор $(1, 0, 0, \ldots)$ не принадлежит $\operatorname{Ran} A$.

Определение. Оператор $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **изометрическим**, если $\|Ux\| = \|x\|$ для всех $x \in \mathscr{H}$. Оператор U называется **частично изометрическим**, если U изометричен после сужения на замкнутое подпространство $(\operatorname{Ker} U)^\perp$.

Таким образом, если U частично изометричен, то $\mathscr{H}$ можно представить в виде $\mathscr{H} = \operatorname{Ker} U \oplus (\operatorname{Ker} U)^\perp$ и $\mathscr{H} = \operatorname{Ran} U \oplus \oplus (\operatorname{Ran} U)^\perp$ и U — унитарный оператор, действующий из **начального подпространства** $(\operatorname{Ker} U)^\perp$ оператора U в его **конечное подпространство** $\operatorname{Ran} U$. Нетрудно видеть, что U^* — частичная изометрия из $\operatorname{Ran} U$ в $(\operatorname{Ker} U)^\perp$, которая действует как отображение, обратное к U: $(\operatorname{Ker} U)^\perp \to \operatorname{Ran} U$.

Предложение. Пусть U — частично изометрический оператор. Тогда $P_i = U^*U$ и $P_f = UU^*$ — проекторы соответственно на начальное и конечное подпространства оператора U. Обратно, если для оператора $U \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ произведения U^*U и UU^* суть проекторы, то U частично изометричен.

Доказательство этого предложения мы оставляем как задачу 18. Теперь мы готовы к доказательству существования аналога разложения $z = |z| e^{i \arg z}$.

Теорема VI.10 (полярное разложение). Пусть A — ограниченный линейный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Существует частичная изометрия U, такая, что $A = U|A|$. Оператор U однозначно определяется условием $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Более того, $\operatorname{Ran} U = \overline{\operatorname{Ran} A}$.

Доказательство. Определим отображение U: $\operatorname{Ran}|A| \to \operatorname{Ran} A$ равенством $U(|A|\psi) = A\psi$. Поскольку

$$\| |A|\psi \|^2 = (\psi, |A|^2\psi) = (\psi, A^*A\psi) = \|A\psi\|^2,$$

оператор U определен корректно, т. е. если $|A|\psi = |A|\varphi$, то $A\psi = A\varphi$. При этом U изометричен и потому продолжается до изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$ в $\overline{\operatorname{Ran} A}$. Продолжим U на все $\mathscr{H}$, определив его нулем на $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp$. Так как $|A|$—самосопряженный оператор, $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp = \operatorname{Ker}|A|$. Более того, $|A|\psi = 0$ тогда и только тогда, когда $A\psi = 0$, так что $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A$. В итоге $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Доказательство единственности оставляем читателю. ∎

В задаче 20 гл. VII читателю будет предложено доказать, что U есть сильный предел полиномов по A и A^*, так что U принадлежит «алгебре фон Неймана», порождаемой оператором A.

VI.5. Компактные операторы

Многие задачи классической математической физики можно упростить, если сформулировать их на языке интегральных уравнений. Знаменитый пример—задача Дирихле, обсуждаемая в конце этого раздела. А сейчас рассмотрим простой оператор K, определяемый в $C[0, 1]$ формулой

$$(K\varphi)(x) = \int_0^1 K(x, y)\,\varphi(y)\,dy, \tag{VI.4}$$

где функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$. Функция $K(x, y)$ называется **ядром интегрального оператора** K. В силу неравенства

$$|(K\varphi)(x)| \leqslant \Big(\sup_{0 \leqslant x,\, y \leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\Big(\sup_{0 \leqslant y \leqslant 1} |\varphi(y)|\Big),$$

имеем

$$\|K\varphi\|_\infty \leqslant \Big(\sup_{0 \leqslant x,\, y \leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\|\varphi\|_\infty,$$

так что K—ограниченный оператор на $C[0, 1]$. Оператор K обладает и другим очень важным свойством. Пусть B_M—множество функций φ в $C[0, 1]$, таких, что $\|\varphi\|_\infty \leqslant M$. Поскольку функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x,\ y \leqslant 1$, а этот квадрат компактен, $K(x, y)$ равномерно непрерывна, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $|K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon$ для всех $y \in [0, 1]$, как только $|x - x'| < \delta$. Следовательно, если $\varphi \in B_M$, то

$$|(K\varphi)(x) - (K\varphi)(x')| \leqslant \Big(\sup_{y \in [0, 1]} |K(x, y) - K(x', y)|\Big)\|\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon M.$$