Доказательство. Определим отображение U: $\operatorname{Ran}|A| \to \operatorname{Ran} A$ равенством $U(|A|\psi) = A\psi$. Поскольку

$$\||A|\psi\|^2 = (\psi, |A|^2\psi) = (\psi, A^*A\psi) = \|A\psi\|^2,$$

оператор U определен корректно, т. е. если $|A|\psi = |A|\varphi$, то $A\psi = A\varphi$. При этом U изометричен и потому продолжается до изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|A|}$ в $\overline{\operatorname{Ran} A}$. Продолжим U на все $\mathscr{H}$, определив его нулем на $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp$. Так как $|A|$—самосопряженный оператор, $(\operatorname{Ran}|A|)^\perp = \operatorname{Ker}|A|$. Более того, $|A|\psi = 0$ тогда и только тогда, когда $A\psi = 0$, так что $\operatorname{Ker}|A| = \operatorname{Ker} A$. В итоге $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Доказательство единственности оставляем читателю. ∎

В задаче 20 гл. VII читателю будет предложено доказать, что U есть сильный предел полиномов по A и A^*, так что U принадлежит «алгебре фон Неймана», порождаемой оператором A.

VI.5. Компактные операторы

Многие задачи классической математической физики можно упростить, если сформулировать их на языке интегральных уравнений. Знаменитый пример—задача Дирихле, обсуждаемая в конце этого раздела. А сейчас рассмотрим простой оператор K, определяемый в $C[0, 1]$ формулой

$$(K\varphi)(x) = \int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy, \tag{VI.4}$$

где функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Функция $K(x, y)$ называется **ядром интегрального оператора** K. В силу неравенства

$$|(K\varphi)(x)| \leqslant \Big(\sup_{0\leqslant x,\, y\leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\Big(\sup_{0\leqslant y\leqslant 1} |\varphi(y)|\Big),$$

имеем

$$\|K\varphi\|_\infty \leqslant \Big(\sup_{0\leqslant x,\, y\leqslant 1} |K(x, y)|\Big)\|\varphi\|_\infty,$$

так что K—ограниченный оператор на $C[0, 1]$. Оператор K обладает и другим очень важным свойством. Пусть B_M—множество функций φ в $C[0, 1]$, таких, что $\|\varphi\|_\infty \leqslant M$. Поскольку функция $K(x, y)$ непрерывна на квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$, а этот квадрат компактен, $K(x, y)$ равномерно непрерывна, т. е. по заданному $\varepsilon > 0$ можно найти такое $\delta > 0$, что $|K(x, y) - K(x', y)| < \varepsilon$ для всех $y \in [0, 1]$, как только $|x - x'| < \delta$. Следовательно, если $\varphi \in B_M$, то

$$|(K\varphi)(x) - (K\varphi)(x')| \leqslant \Big(\sup_{y\in[0,1]} |K(x, y) - K(x', y)|\Big)\|\varphi\|_\infty \leqslant \varepsilon M.$$

Таким образом, функции $K[B_M]$ равностепенно непрерывны. Поскольку они, кроме того, равномерно ограничены константой $\|K\| M$, с помощью теоремы Асколи (теоремы I.28) можно заключить, что для любой последовательности $\varphi_n \in B_M$ последовательность $K\varphi_n$ содержит сходящуюся подпоследовательность (предел которой может не лежать в $K[B_M]$). Это можно выразить по-другому, сказав, что множество $K[B_M]$ **предкомпактно**, т. е. что его замыкание компактно в $C[0, 1]$. Ясно, что выбор M не важен, и, следовательно, мы показали, что K переводит ограниченные множества в предкомпактные. Именно благодаря этому свойству для хороших интегральных уравнений типа (VI.4) выполняется так называемая альтернатива Фредгольма. Этот раздел мы посвящаем изучению таких операторов.

Определение. Пусть X и Y—банаховы пространства. Оператор $T \in \mathscr{L}(X, Y)$ называется **компактным** (или вполне непрерывным), если он переводит ограниченные множества из X в предкомпактные множества в Y. Эквивалентно, T компактен тогда и только тогда, когда для любой ограниченной последовательности $\{x_n\} \subset X$ последовательность $\{Tx_n\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся в Y.

Интегральный оператор (VI.4)—пример компактного оператора. Другой класс примеров таков:

Пример (операторы конечного ранга). Предположим, что область значений оператора T конечномерна, т. е. каждый вектор из $\operatorname{Ran} T$ можно представить в виде $Tx = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i y_i$, где $\{y_i\}_{i=1}^{N}$—некоторое фиксированное семейство в Y. Если x_n—любая ограниченная последовательность из X, то ограничены и соответствующие семейства α_i^n, поскольку ограничен T. Обычным образом из $\{Tx_n\}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность, что и доказывает компактность T.

Важное свойство компактных операторов описывается следующей теоремой (ср. с задачей 34):

Теорема VI.11. Компактные операторы отображают слабо сходящиеся *последовательности* в равномерно сходящиеся.

Доказательство. Предположим, что $x_n \xrightarrow{w} x$. По теореме о равномерной ограниченности совокупность $\|x_n\|$ ограничена. Пусть $y_n = Tx_n$. Тогда $l(y_n) - l(y) = (T'l)(x_n - x)$ для любого $l \in Y^*$. Таким образом, y_n в Y слабо сходится к $y = Tx$. Предположим теперь, что y_n не сходится к y равномерно. Тогда существуют такие $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{y_{n_k}\}$ в $\{y_n\}$, что $\|y_{n_k} - y\| \geqslant \varepsilon$. Поскольку последовательность $\{x_{n_k}\}$ ограничена, а T компактен, в $\{y_{n_k}\}$ содержится подпоследовательность, слабо сходящаяся к $\tilde{y} \neq y$. Но в таком случае и сама $\{y_{n_k}\}$ должна слабо сходиться к $\tilde{y}$, чего не может быть, так как $\{y_n\}$ слабо сходится к y. Следовательно, y_n сходится к y равномерно. ∎

Отметим, что для рефлексивных пространств X справедлива обратная теорема (задача 20). Следующая теорема важна, поскольку она позволяет установить компактность оператора, если он является равномерным пределом последовательности компактных операторов или сопряженным к компактному оператору.

Теорема VI.12. Пусть X и Y—банаховы пространства, $T \in \mathcal{L}(X, Y)$.

(a) Если $\{T_n\}$ компактны и $T_n \to T$ равномерно, то T компактен.

(b) T компактен тогда и только тогда, когда компактен T'.

(c) Если $S \in \mathcal{L}(Y, Z)$, где Z—банахово пространство, и T *или* S компактен, то ST компактен.

Доказательство. (a) Пусть $\{x_m\}$—последовательность в единичном шаре из X. Поскольку T_n компактен при каждом n, с помощью диагонального метода § I.5 можно найти подпоследовательность в $\{x_m\}$, обозначим ее $\{x_{m_k}\}$, такую, что $T_n x_{m_k} \to y_n$ для каждого n при $k \to \infty$. Так как $\|x_{m_k}\| \leqslant 1$ и $\|T_n - T\| \to 0$, то $\varepsilon/3$-прием показывает, что $\{y_n\}$ есть последовательность Коши. В итоге $y_n \to y$. С помощью $\varepsilon/3$-приема нетрудно доказать, что и $Tx_{m_k} \to y$. Следовательно, T компактен.

(b) См. Замечания и задачу 36.

(c) Доказательство элементарно (задача 37). ∎

Нас больше всего интересует случай компактных операторов из сепарабельного гильбертова пространства в себя, поэтому мы не будем дальше заниматься общим случаем (см., однако, обсуждение в Замечаниях). Интересующее нас банахово пространство компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве мы обозначим через $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$. Как следует из приведенного выше примера и теоремы VI.12, равномерный предел последовательности операторов конечного ранга есть компактный оператор. В случае гильбертова пространства справедливо и обратное.

Теорема VI.13. Пусть $\mathcal{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Тогда любой компактный оператор на $\mathcal{H}$ есть равномерный предел последовательности операторов конечного ранга.

Доказательство. Пусть $\{\varphi_j\}_{j=1}^{\infty}$ — ортонормированное множество в $\mathscr{H}$. Определим

$$\lambda_n = \sup_{\substack{\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^{\perp} \\ \|\psi\|=1}} \|T\psi\|.$$

Ясно, что $\{\lambda_n\}$ монотонно убывает и потому сходится к некоторому пределу $\lambda \geqslant 0$. Покажем сначала, что $\lambda = 0$. Выберем последовательность $\psi_n \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_n]^{\perp}$, $\|\psi_n\| = 1$, для которой $\|T\psi_n\| \geqslant \lambda/2$. Так как $\psi_n \xrightarrow{w} 0$, то по теореме VI.11 $T\psi_n \to 0$. Следовательно, $\lambda = 0$. В результате

$$\sum_{j=1}^{n} (\varphi_j, \cdot)\, T\varphi_j \to T$$

равномерно, поскольку λ_n как раз равно норме разности правой и левой частей этого соотношения. ∎

Мы уже отметили широкое разнообразие свойств компактных операторов, но до сих пор еще не указали ни одного свойства, объясняющего наш особый интерес к ним. Основной факт, делающий компактные операторы важными,— это альтернатива Фредгольма: если A компактен, то либо уравнение $A\psi = \psi$ имеет решение, либо существует $(I - A)^{-1}$. Это свойство отнюдь не присуще каждому ограниченному линейному преобразованию. Например, если A — оператор вида $(A\varphi)(x) = x\varphi(x)$ на $L^2[0, 2]$, то $A\varphi = \varphi$ не имеет решений, но $(I - A)^{-1}$ не существует (как ограниченный оператор). В терминах «разрешимых уравнений» альтернатива Фредгольма особенно красива. Она гласит: если для любого φ существует хотя бы одно решение уравнения $\psi = \varphi + A\psi$, то это решение единственно. Таким образом, компактность и единственность вместе влекут за собой существование решения; в качестве примера см. в конце раздела обсуждение задачи Дирихле.

Поскольку альтернатива Фредгольма справедлива для конечномерных матриц, можно ожидать, что для компактных операторов (в гильбертовом пространстве) ее удается доказать путем представления компактного оператора A в виде $A = F + R$, где F — оператор конечного ранга, а R имеет малую норму. Но компактность очень хорошо сочетается с аналитичностью, поэтому сначала мы докажем один элегантный результат, который весьма полезен и сам по себе (см. § XII.7 и XIII.4).

Теорема VI.14 (аналитическая теорема Фредгольма). Пусть D — открытое связное подмножество в $\mathbb{C}$. Пусть $f\colon D \to \mathscr{L}(\mathscr{H})$ — аналитическая операторнозначная функция, такая, что $f(z)$ — компактный оператор для каждого $z \in D$. Тогда либо

(a) $(I - f(z))^{-1}$ не существует ни для какого $z \in D$, либо

(b) $(I-f(z))^{-1}$ существует для всех $z\in D\setminus S$, где S — дискретное подмножество в D (т. е. множество, не имеющее предельных точек в D). В этом случае $(I-f(z))^{-1}$ мероморфна в D, аналитична в $D\setminus S$, ее вычеты в полюсах — операторы конечного ранга, и если $z\in S$, то уравнение $f(z)\psi=\psi$ имеет ненулевое решение в $\mathscr{H}$.

Доказательство. Мы докажем, что либо (a), либо (b) выполняется вблизи любой точки z_0. Тогда простые соображения, основанные на связности D, позволят перенести результат на все D (задача 21). По заданному $z_0\in D$ выберем такое r, что если $|z-z_0|<r$, то $\|f(z)-f(z_0)\|<1/2$, и возьмем оператор конечного ранга F со свойством

$$\|f(z_0)-F\|<1/2.$$

Тогда для $z\in D_r$ (где D_r — круг радиуса r с центром z_0) имеем $\|f(z)-F\|<1$. Пользуясь разложением в геометрическую прогрессию, легко увидеть, что $(I-f(z)+F)^{-1}$ существует и аналитична.

Так как F конечного ранга, то существуют независимые векторы $\psi_1, \ldots, \psi_N$, такие, что $F(\varphi)=\sum_{i=1}^{N}\alpha_i(\varphi)\psi_i$. Коэффициенты $\alpha_i(\cdot)$ суть ограниченные линейные функционалы на $\mathscr{H}$, и потому по лемме Рисса существуют векторы $\phi_1, \ldots, \phi_N$, такие, что $F(\varphi)=\sum_{i=1}^{N}(\phi_i, \varphi)\psi_i$ для всех $\varphi\in\mathscr{H}$. Пусть

$$\phi_n(z)=((I-f(z)+F)^{-1})^*\phi_n,$$

$$g(z)=F(I-f(z)+F)^{-1}=\sum_{n=1}^{N}(\phi_n(z), \cdot)\psi_n.$$

Записав

$$(I-f(z))=(I-g(z))(I-f(z)+F),$$

мы видим, что оператор $I-f(z)$ обратим при $z\in D_r$ тогда и только тогда, когда обратим $I-g(z)$, и что уравнение $\psi=f(z)\psi$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда его имеет $\varphi=g(z)\varphi$.

Если $g(z)\varphi=\varphi$, то $\varphi=\sum_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ и β_n удовлетворяют уравнению

$$\beta_n=\sum_{m=1}^{N}(\phi_n(z), \psi_m)\beta_m. \tag{VI.5a}$$

Обратно, если (VI.5a) имеет решение $\langle\beta_1, \ldots, \beta_N\rangle$, то $\varphi=\sum_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ — решение для $g(z)\varphi=\varphi$. Таким образом, уравнение

$g(z)\varphi=\varphi$ имеет решение тогда и только тогда, когда

$$d(z)=\det\{\delta_{nm}-(\phi_n(z),\ \psi_m)\}=0.$$

Поскольку $(\phi_n(z), \psi_m)$ аналитична в D_r, такова же и функция $d(z)$. Это означает, что либо $S_r=\{z\,|\,z\in D_r,\ d(z)=0\}$—дискретное множество в D_r, либо $S_r=D_r$. Предположим теперь, что $d(z)\neq 0$. Тогда по заданному ψ можно построить решение уравнения $(I-g(z))\varphi=\psi$, положив $\varphi=\psi+\sum_{n=1}^{N}\beta_n\psi_n$ и найдя β_n, удовлетворяющие уравнению

$$\beta_n=(\phi_n(z),\ \psi)+\sum_{m=1}^{N}(\phi_n(z),\ \psi_m)\,\beta_m. \tag{VI.5b}$$

Но ведь $d(z)\neq 0$ и, следовательно, это уравнение имеет решение. Итак, $(I-g(z))^{-1}$ существует тогда и только тогда, когда $z\notin S_r$.

Мероморфность $(I-f(z))^{-1}$ и конечность рангов вычетов следуют из явной формулы для β_n, известной из линейной алгебры. ∎

Эта теорема имеет четыре важных следствия.

Следствие (альтернатива Фредгольма). Если A—компактный оператор на $\mathscr{H}$, то либо существует $(I-A)^{-1}$, либо имеет решение уравнение $A\psi=\psi$.

Доказательство. Достаточно взять $f(z)=zA$ и применить последнюю теорему при $z=1$. ∎

Теорема VI.15 (теорема Рисса—Шаудера). Пусть A—компактный оператор на $\mathscr{H}$; тогда $\sigma(A)$—дискретное множество, не имеющее предельных точек, кроме, быть может, $\lambda=0$. Далее, любое ненулевое $\lambda\in\sigma(A)$ является собственным значением конечной кратности (т. е. соответствующее пространство собственных векторов конечномерно).

Доказательство. Пусть $f(z)=zA$. Тогда $f(z)$—аналитическая на всей комплексной плоскости функция со значениями в множестве компактных операторов. Таким образом, $\{z\,|\,zA\psi=\psi$ имеет решение $\psi\neq 0\}$—дискретное множество, и если $1/\lambda$ не лежит в этом дискретном множестве, то

$$(\lambda-A)^{-1}=\frac{1}{\lambda}\left(I-\frac{1}{\lambda}A\right)^{-1}$$

существует. То что ненулевые собственные значения имеют конечную кратность, немедленно следует из компактности A. ∎

Теорема VI.16 (теорема Гильберта—Шмидта). Пусть A—самосопряженный компактный оператор на $\mathscr{H}$. Тогда в $\mathscr{H}$ существует полный ортонормированный базис $\{\phi_n\}$, такой, что $A\phi_n = \lambda_n \phi_n$ и $\lambda_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Доказательство. Выберем в множестве собственных векторов, отвечающих каждому собственному значению A, ортонормированный базис. Объединение всех таких векторов $\{\phi_n\}$ есть ортонормированное множество, так как собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны. Пусть $\mathcal{M}$—замыкание линейной оболочки $\{\phi_n\}$. Поскольку A самосопряжен и $A\colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}$, имеем $A\colon \mathcal{M}^\perp \to \mathcal{M}^\perp$. Пусть $\tilde{A}$—сужение A на $\mathcal{M}^\perp$. Тогда оператор $\tilde{A}$ самосопряжен и компактен, ибо таков A. По теореме Рисса—Шаудера любое $\lambda \neq 0$, лежащее в $\sigma(\tilde{A})$, есть собственное значение оператора $\tilde{A}$ и, значит, оператора A. Отсюда следует, что спектральный радиус $\tilde{A}$ равен нулю, так как собственные векторы A лежат в $\mathcal{M}$. Тогда из самосопряженности $\tilde{A}$ с учетом теоремы VI.6 вытекает, что $\tilde{A}$—нулевой оператор на $\mathcal{M}^\perp$. Таким образом, $\mathcal{M}^\perp = \{0\}$, ибо если $\varphi \in \mathcal{M}^\perp$, то $A\varphi = 0$, т. е. $\varphi \in \mathcal{M}$. Следовательно, $\mathcal{M} = \mathcal{H}$.

Тот факт, что $\lambda_n \to 0$, есть следствие первой части теоремы Рисса—Шаудера, утверждающей, что каждое ненулевое собственное значение имеет конечную кратность, а единственной предельной точкой последовательности λ_n может быть лишь нуль. ∎

Теорема VI.17 (каноническая форма компактного оператора). Пусть A—компактный оператор на $\mathcal{H}$. Тогда существуют (не обязательно полные) ортонормированные множества $\{\psi_n\}_{n=1}^N$ и $\{\phi_n\}_{n=1}^N$ и положительные вещественные числа $\{\lambda_n\}_{n=1}^N$, такие, что

$$A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\, \phi_n. \qquad \text{(VI.6)}$$

Сумма в (VI.6), которая может быть конечной или бесконечной, равномерно сходится. Числа $\{\lambda_n\}$ называются **сингулярными числами** оператора A.

Доказательство. Поскольку A компактен, таков и A^*A (теорема VI.12). Следовательно, A^*A компактен и самосопряжен. По теореме Гильберта—Шмидта существует ортонормированное множество $\{\psi_n\}_{n=1}^N$, такое, что $A^*A\psi_n = \mu_n \psi_n$, где $\mu_n \neq 0$, и такое, что A^*A—нулевой оператор на подпространстве, ортогональном к $\{\psi_n\}_{n=1}^N$. Поскольку A^*A положителен, каждое $\mu_n > 0$. Пусть λ_n—положительный квадратный корень из μ_n и $\phi_n = A\psi_n/\lambda_n$. Короткое вычисление показывает, что ϕ_n ортонормированы и

$$A\psi = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \psi)\, \phi_n. \ ∎$$

Это доказательство показывает, что сингулярные числа оператора A — это в точности собственные значения $|A|$.

Закончим этот раздел классическим примером.

Пример (задача Дирихле). Главным стимулом к изучению компактных операторов служит возможность использовать интегральные уравнения при решении классических граничных задач математической физики. Мы кратко опишем этот метод. Пусть D — открытая ограниченная область в $\mathbb{R}^3$ с гладкой граничной поверхностью ∂D. Задача Дирихле для уравнения Лапласа формулируется так: задана непрерывная функция f на ∂D; найти функцию u, дважды дифференцируемую в D, непрерывную на $\overline{D}$ и такую, что

$$\Delta u(x) = 0, \qquad x \in D,$$
$$u(x) = f(x), \quad x \in \partial D.$$

Пусть $K(x, y) = (x-y, n_y)/2\pi|x-y|^3$, где n_y — внешняя нормаль к ∂D в точке $y \in \partial D$. Тогда $K(x, y)$ как функция от x удовлетворяет уравнению $\Delta_x K(x, y) = 0$ во внутренности области, что наводит на мысль записать u как суперпозицию

$$u(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\,\varphi(y)\,dS(y),$$

где $\varphi(y)$ — некоторая непрерывная функция на ∂D, а dS — обычный элемент площади. В самом деле, при $x \in D$ интеграл имеет точный смысл и $\Delta u(x) = 0$ в D. Более того, если x_0 — любая точка в ∂D и $x \to x_0$ *изнутри* D, то можно доказать, что

$$u(x) \to -\varphi(x_0) + \int_{\partial D} K(x_0, y)\,\varphi(y)\,dS(y).$$

Хотя это и не очевидно сразу, но можно убедиться, что

$$\int_{\partial D} K(x_0, y)\,\varphi(y)\,dS(y)$$

существует и является непрерывной функцией на ∂D, если φ — непрерывная функция на ∂D. В доказательстве используется гладкость границы области D, благодаря которой $(x-y, n_y) \approx \approx c|x-y|^2$ для $x, y \in \partial D$ при $x \to y$.

Поскольку мы хотим, чтобы $u(x) = f(x)$ на ∂D, весь вопрос сводится к тому, сможем ли мы найти такое φ, чтобы

$$f(x) = -\varphi(x) + \int_{\partial D} K(x, y)\,\varphi(y)\,dS(y), \quad x \in \partial D.$$

Пусть $T\colon C(\partial D) \to C(\partial D)$ задано равенством

$$(T\varphi)(x) = \int_{\partial D} K(x, y)\,\varphi(y)\,dS(y).$$

Оператор T не только ограничен, но и (как будет скоро показано) компактен. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма, либо $\lambda=1$ принадлежит точечному спектру T и в этом случае существует функция $\psi \in C(\partial D)$, такая, что $(I-T)\psi=0$, либо $-f=(I-T)\varphi$ обладает единственным решением для каждой функции $f \in C(\partial D)$. Но первое невозможно, поскольку в силу принципа максимума решение исходной задачи, если оно существует, единственно. Таким образом, имеет место второй вывод, т. е. компактность интегрального оператора и априорное знание единственности привели к доказательству существования решения.

Идея доказательства компактности такова. Пусть

$$K_\delta(x, z)=\frac{(x-z,\ n_z)}{|x-z|^3+\delta}.$$

Если $\delta>0$, то ядро K_δ непрерывно и, подобно тому как это пояснялось в начале этого раздела, можно доказать, что интегральные операторы T_δ компактны. Для доказательства компактности T достаточно установить, что $\|T-T_\delta\| \to 0$ при $\delta \to 0$. Ввиду оценки

$$|(T_\delta f)(x)-(Tf)(x)| \leqslant \|f\|_\infty \int_{\partial D} |K(x, z)-K_\delta(x, z)|\, dS(z)$$

для этого нужно лишь доказать, что интеграл сходится к нулю равномерно по x при $\delta \to 0$. Разделим область интегрирования на множество, где $|x-z| \geqslant \varepsilon$, и его дополнение. В первой области при фиксированном ε ядра сходятся равномерно. Вклад второй области благодаря интегрируемости K может быть сделан произвольно малым для достаточно малых ε.

VI.6. Операторы со следом и идеал операторов Гильберта — Шмидта

В предыдущем разделе мы видели, что компактные операторы обладают рядом привлекательных свойств и полезны в приложениях. По этой причине важно располагать эффективным критерием компактности заданного оператора или, еще лучше, общими утверждениями о целых классах операторов. В этом разделе мы докажем, что интегральный оператор

$$(Tf)(x)=\int_M K(x, y)\, f(y)\, d\mu(y)$$

на $L^2(M, d\mu)$ компактен, если $K(\cdot, \cdot) \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$. Сначала мы разовьем понятие следа — вспомогательное средство,