Оператор T не только ограничен, но и (как будет скоро показано) компактен. Следовательно, согласно альтернативе Фредгольма, либо $\lambda=1$ принадлежит точечному спектру T и в этом случае существует функция $\psi \in C(\partial D)$, такая, что $(I-T)\psi=0$, либо $-f=(I-T)\varphi$ обладает единственным решением для каждой функции $f\in C(\partial D)$. Но первое невозможно, поскольку в силу принципа максимума решение исходной задачи, если оно существует, единственно. Таким образом, имеет место второй вывод, т. е. компактность интегрального оператора и априорное знание единственности привели к доказательству существования решения.

Идея доказательства компактности такова. Пусть

$$K_\delta(x, z)=\frac{(x-z,\ n_z)}{|x-z|^3+\delta}.$$

Если $\delta>0$, то ядро K_δ непрерывно и, подобно тому как это пояснялось в начале этого раздела, можно доказать, что интегральные операторы T_δ компактны. Для доказательства компактности T достаточно установить, что $\|T-T_\delta\|\to 0$ при $\delta\to 0$. Ввиду оценки

$$|(T_\delta f)(x)-(Tf)(x)|\leqslant\|f\|_\infty\int_{\partial D}|K(x, z)-K_\delta(x, z)|\,dS(z)$$

для этого нужно лишь доказать, что интеграл сходится к нулю равномерно по x при $\delta\to 0$. Разделим область интегрирования на множество, где $|x-z|\geqslant\varepsilon$, и его дополнение. В первой области при фиксированном ε ядра сходятся равномерно. Вклад второй области благодаря интегрируемости K может быть сделан произвольно малым для достаточно малых ε.

VI.6. Операторы со следом и идеал операторов Гильберта — Шмидта

В предыдущем разделе мы видели, что компактные операторы обладают рядом привлекательных свойств и полезны в приложениях. По этой причине важно располагать эффективным критерием компактности заданного оператора или, еще лучше, общими утверждениями о целых классах операторов. В этом разделе мы докажем, что интегральный оператор

$$(Tf)(x)=\int_M K(x, y)\,f(y)\,d\mu(y)$$

на $L^2(M, d\mu)$ компактен, если $K(\cdot,\cdot)\in L^2(M\times M,\ d\mu\otimes d\mu)$. Сначала мы разовьем понятие следа — вспомогательное средство, представляющее и большой самостоятельный интерес. Теорема VI.12 показывает, что $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$—множество компактных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ — образует банахово пространство. В конце раздела мы вычислим сопряженное и второе сопряженное к $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$. Эти вычисления проиллюстрируют разницу между слабой банаховой и слабой операторной топологиями на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ и дадут первое представление о строении абстрактных алгебр фон Неймана, которые мы будем изучать позднее.

След—это обобщение обычного понятия суммы диагональных элементов матрицы, но из-за бесконечности сумм не все операторы обладают следом. Построение следа аналогично построению интеграла Лебега, когда сначала определяют $\int f\,d\mu$ для $f \geqslant 0$; в таком случае интеграл принимает значения на полупрямой $[0, \infty]$, включая ∞. Затем определяют $\mathscr{L}^1$ как множество тех f, для которых $\int |f|\,d\mu < \infty$. Оно оказывается векторным пространством, а $f \mapsto \int f\,d\mu$—линейным функционалом. Подобным образом мы сначала определим след $\mathrm{tr}(\cdot)$ на положительных операторах; отображение $A \mapsto \mathrm{tr}\,A$ тогда будет принимать значения в $[0, \infty]$. Затем мы определим **класс операторов со следом** $\mathfrak{I}_1$ как множество всех $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, таких, что $\mathrm{tr}|A| < \infty$. Наконец, мы покажем, что $\mathrm{tr}(\cdot)$—линейный функционал на $\mathfrak{I}_1$ с правильными свойствами.

Теорема VI.18. Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в нем. Тогда для любого положительного оператора $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ определим $\mathrm{tr}\,A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$. Число $\mathrm{tr}\,A$ называется **следом** A и не зависит от выбора ортонормированного базиса. След обладает такими свойствами:

(a) $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}\,A + \mathrm{tr}\,B$;
(b) $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\,\mathrm{tr}\,A$ для всех $\lambda \geqslant 0$;
(c) $\mathrm{tr}(UAU^{-1}) = \mathrm{tr}\,A$ для любого унитарного оператора U;
(d) если $0 \leqslant A \leqslant B$, то $\mathrm{tr}\,A \leqslant \mathrm{tr}\,B$.

Доказательство. Для заданного ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ определим $\mathrm{tr}_\varphi(A) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$. Если $\{\psi_m\}_{m=1}^{\infty}$—другой ортонормированный базис, то

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}_\varphi(A) &= \sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, A\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\|A^{1/2}\varphi_n\|^2 = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|(\psi_m, A^{1/2}\varphi_n)|^2\right) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|(A^{1/2}\psi_m,\varphi_n)|^2\right) = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty}\|A^{1/2}\psi_m\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty}(\psi_m, A\psi_m) = \operatorname{tr}_\psi(A).\end{aligned}$$

Перестановка порядка суммирования допустима, поскольку все члены положительны.

Свойства (a), (b) и (d) очевидны. Для доказательства (c) заметим, что если $\{\varphi_n\}$—ортонормированный базис, то и $\{U\varphi_n\}$— тоже. Следовательно,

$$\operatorname{tr}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_{(U\varphi)}(UAU^{-1}) = \operatorname{tr}_\varphi(A) = \operatorname{tr}(A). \blacksquare$$

Определение. Оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ назовем **оператором со следом**, если $\operatorname{tr}|A| < \infty$. Семейство всех таких операторов обозначим через $\mathscr{I}_1$.

Основные свойства $\mathscr{I}_1$ описывает следующая

Теорема VI.19. $\mathscr{I}_1$ есть $*$-идеал в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е.

(a) $\mathscr{I}_1$—векторное пространство;
(b) если $A \in \mathscr{I}_1$ и $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, то $AB \in \mathscr{I}_1$ и $BA \in \mathscr{I}_1$;
(c) если $A \in \mathscr{I}_1$, то и $A^* \in \mathscr{I}_1$.

Доказательство. (a) Так как $|\lambda A| = |\lambda||A|$ для $\lambda \in \mathbf{C}$, то $\mathscr{I}_1$ замкнуто относительно умножения на скаляры. Предположим теперь, что A и $B \in \mathscr{I}_1$; мы хотим доказать, что $A+B \in \mathscr{I}_1$. Пусть U, V и W—частичные изометрии, возникающие при полярном разложении $A+B$, A и B:

$$\begin{aligned}A+B &= U|A+B|,\\ A &= V|A|,\\ B &= W|B|.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(\varphi_n, |A+B|\varphi_n) &= \sum_{n=1}^{N}(\varphi_n, U^*(A+B)\varphi_n) \leqslant \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N}|(\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n)| + \sum_{n=1}^{N}|(\varphi_n, U^*W|B|\varphi_n)|.\end{aligned}$$

Однако

$$\sum_{n=1}^{N} |(\varphi_n, U^*V|A|\varphi_n)| \leqslant \sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \| \| |A|^{1/2}\varphi_n \| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2}\varphi_n \|^2\right)^{1/2}.$$

Следовательно, если мы сможем показать, что

$$\sum_{n=1}^{N} \| |A|^{1/2} V^*U\varphi_n \|^2 \leqslant \operatorname{tr}|A|, \qquad \text{(VI.7)}$$

то сможем заключить, что

$$\sum_{n=1}^{N} (\varphi_n, |A+B|\varphi_n) \leqslant \operatorname{tr}|A| + \operatorname{tr}|B| < \infty$$

и что $A+B \in \mathfrak{I}_1$. Для доказательства (VI.7) нужно только убедиться, что

$$\operatorname{tr}(U^*V|A|V^*U) \leqslant \operatorname{tr}|A|.$$

Выбирая ортонормированный базис $\{\varphi_n\}$ так, чтобы каждый φ_n лежал либо в $\operatorname{Ker} U$, либо в $(\operatorname{Ker} U)^\perp$, увидим, что $\operatorname{tr}(U^*(V|A|V^*)U) \leqslant \operatorname{tr}(V|A|V^*)$. Аналогично, выбирая ортонормированный базис $\{\psi_m\}$, где ψ_m лежит в $\operatorname{Ker} V^*$ или в $(\operatorname{Ker} V^*)^\perp$, найдем, что $\operatorname{tr}(V|A|V^*) \leqslant \operatorname{tr} A$.

(b) В силу доказываемой ниже леммы, каждый оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ может быть записан как линейная комбинация четырех унитарных операторов, поэтому с учетом (a) нам остается только показать, что при унитарном U из $A \in \mathfrak{I}_1$ вытекает $UA \in \mathfrak{I}_1$ и $AU \in \mathfrak{I}_1$. Но $|UA| = |A|$ и $|AU| = |U^{-1}AU|$, поэтому, в силу пункта (c) теоремы VI.18, AU и UA лежат в $\mathfrak{I}_1$.

(c) Пусть $A = U|A|$ и $A^* = V|A^*|$—полярные разложения A и A^*. Тогда $|A^*| = V^*|A|U^*$. Если $A \in \mathfrak{I}_1$, то $|A| \in \mathfrak{I}_1$ и потому, в силу пункта (b), $|A^*| \in \mathfrak{I}_1$ и $A^* = V|A^*| \in \mathfrak{I}_1$. ∎

Для завершения доказательства пункта (b) нужна следующая лемма, которая будет применяться и в других местах:

Лемма. Каждый оператор $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ можно записать как линейную комбинацию четырех унитарных операторов.

Доказательство. Поскольку оператор $B = \frac{1}{2}(B+B^*) - \frac{i}{2}[i(B-B^*)]$, его можно записать как линейную комбинацию двух самосопряженных операторов. Итак, предположим, что A самосопряжен, и, не ограничивая общности, будем считать, что

$\|A\| \leqslant 1$. Тогда $A \pm i\sqrt{I-A^2}$ унитарны и $A = \frac{1}{2}(A + i\sqrt{I-A^2}) + \frac{1}{2}(A - i\sqrt{I-A^2})$. ∎

Доказательство следующей теоремы мы оставляем читателю (задача 23).

Теорема VI.20. Пусть норма $\|\cdot\|_1$ задана на $\mathcal{J}_1$ равенством $\|A\|_1 = \operatorname{tr}|A|$. Тогда $\mathcal{J}_1$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_1$ и $\|A\| \leqslant \|A\|_1$.

Отметим, что множество $\mathcal{J}_1$ *не замкнуто* относительно операторной нормы $\|\cdot\|$.

Опишем теперь простую связь между $\mathcal{J}_1$ и множеством компактных операторов:

Теорема VI.21. Каждый оператор $A \in \mathcal{J}_1$ компактен. Компактный оператор A лежит в $\mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n < \infty$, где $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — сингулярные числа A.

Доказательство. Если $A \in \mathcal{J}_1$, то $|A|^2 \in \mathcal{J}_1$ и $\operatorname{tr}(|A|^2) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \|A\varphi_n\|^2 < \infty$ для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$. Пусть $\psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_N]^{\perp}$ и $\|\psi\| = 1$; тогда

$$\|A\psi\|^2 \leqslant \operatorname{tr}(|A|^2) - \sum_{n=1}^{N} \|A\varphi_n\|^2,$$

поскольку $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_N, \psi\}$ всегда можно дополнить до ортонормированного базиса. Таким образом,

$$\sup\{\|A\psi\| \mid \psi \in [\varphi_1, \ldots, \varphi_N]^{\perp}, \|\psi\| = 1\} \to 0 \text{ при } N \to \infty.$$

Следовательно, $\sum\limits_{n=1}^{N} (\varphi_n, \cdot) A\varphi_n$ равномерно сходится к A, т. е. A компактен. Вторая часть теоремы легко выводится с использованием канонической формы, описанной в теореме VI.17 (задача 24). ∎

Следствие. Множество операторов конечного ранга $\|\cdot\|_1$-плотно в $\mathcal{J}_1$.

Второй класс операторов, который мы обсудим, — это множество операторов Гильберта — Шмидта, аналог $\mathscr{L}^2$.

Определение. Оператор $T \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$ называется **оператором Гильберта — Шмидта**, если $\operatorname{tr} T^*T < \infty$. Класс всех таких операторов обозначим через $\mathcal{J}_2$.

С помощью тех же рассуждений, что и в случае $\mathcal{J}_1$, можно доказать, что справедлива

Теорема VI.22. (a) Множество $\mathcal{J}_2$ есть $*$-идеал.

(b) Если $A, B \in \mathcal{J}_2$, то для любого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$ ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A^*B\varphi_n)$$

абсолютно суммируем и его предел, обозначаемый через $(A, B)_2$, не зависит от выбора ортонормированного базиса.

(c) $\mathcal{J}_2$, снабженное внутренним произведением $(\cdot, \cdot)_2$, есть гильбертово пространство.

(d) Если $\|A\|_2 = \sqrt{(A, A)_2} = (\operatorname{tr}(A^*A))^{1/2}$, то

$$\|A\| \leqslant \|A\|_2 \leqslant \|A\|_1 \quad \text{и} \quad \|A\|_2 = \|A^*\|_2.$$

(e) Каждый оператор $A \in \mathcal{J}_2$ компактен, а компактный оператор A лежит в $\mathcal{J}_2$ тогда и только тогда, когда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n^2 < \infty$, где λ_n — сингулярные числа A.

(f) Множество операторов конечного ранга $\|\cdot\|_2$-плотно в $\mathcal{J}_2$.

(g) $A \in \mathcal{J}_2$ тогда и только тогда, когда $\{\|A\varphi_n\|\} \in l_2$ для некоторого ортонормированного базиса $\{\varphi_n\}$.

(h) $A \in \mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда $A = BC$, где $B, C \in \mathcal{J}_2$.

Отметим, что $\mathcal{J}_2$ не замкнут по $\|\cdot\|_2$. Важный факт о $\mathcal{J}_2$ состоит в том, что, когда $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, множество $\mathcal{J}_2$ имеет конкретную функциональную реализацию.

Теорема VI.23. Пусть $\langle M, \mu \rangle$ — пространство с мерой и $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$. Тогда $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ есть оператор Гильберта — Шмидта тогда и только тогда, когда существует функция

$$K \in L^2(M \times M,\ d\mu \otimes d\mu),$$

такая, что

$$(Af)(x) = \int K(x, y) f(y)\, d\mu(y).$$

Более того,

$$\|A\|_2^2 = \int |K(x, y)|^2\, d\mu(x)\, d\mu(y).$$

Доказательство. Пусть функция $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$ и A_K — ассоциированный с ней интегральный оператор. Легко видеть (задача 25), что A_K корректно определен на $\mathcal{H}$ и что

$$\|A_K\| \leqslant \|K\|_{L^2}. \tag{VI.8}$$

Пусть $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в $L^2(M, d\mu)$. Тогда $\{\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(y)}\}_{n,m=1}^{\infty}$—ортонормированный базис в пространстве $L^2(M\times M,\ d\mu\otimes d\mu)$, так что

$$K=\sum_{n,m=1}^{\infty}\alpha_{n,m}\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(y)}.$$

Пусть

$$K_N=\sum_{n,m=1}^{N}\alpha_{n,m}\,\varphi_n(x)\,\overline{\varphi_m(y)}.$$

Тогда каждая функция K_N есть интегральное ядро оператора конечного ранга. Действительно, $A_{K_N}=\sum_{n,m=1}^{N}\alpha_{n,m}(\varphi_m,\cdot)\,\varphi_n$. Поскольку $\|K_N-K\|_{L^2}\to 0$, с учетом (VI.8) имеем, что $\|A_K-A_{K_N}\|\to 0$ при $N\to\infty$. Следовательно, A_K—компактный оператор и

$$\operatorname{tr}(A_K^*A_K)=\sum_{n=1}^{\infty}\|A_K\varphi_n\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}|\alpha_{n,m}|^2=\|K\|_{L^2}.$$

Таким образом, $A_K\in\mathcal{I}_2$ и $\|A_K\|_2=\|K\|_{L^2}$.

Мы уже показали, что отображение $K\mapsto A_K$—это изометрия пространства $L^2(M\times M,\ d\mu\otimes d\mu)$ в $\mathcal{I}_2$, поэтому ее область значений замкнута. Но операторы конечного ранга очевидным образом можно получить из ядер, а поскольку они плотны в $\mathcal{I}_2$, область значений отображения $K\mapsto A_K$ есть все $\mathcal{I}_2$. ∎

Эта теорема дает простое достаточное условие компактности оператора и потому весьма полезна. Отметим, что ее условие не является необходимым. Одновременно у нас появилось достаточное условие того, что оператор на $\mathcal{H}=L^2(M, d\mu)$ является интегральным оператором. Это условие также не необходимо. Вернемся теперь к определению следа на $\mathcal{I}_1$.

Теорема VI.24. Если $A\in\mathcal{I}_1$ и $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$—любой ортонормированный базис, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\varphi_n, A\varphi_n)$ сходится абсолютно и его сумма не зависит от выбора базиса.

Доказательство. Запишем A в виде $U|A|^{1/2}|A|^{1/2}$. Тогда

$$|(\varphi_n, A\varphi_n)|\leqslant\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|\,\||A|^{1/2}\varphi_n\|.$$

Таким образом,

$$\sum_{n=1}^{\infty}|(\varphi_n, A\varphi_n)|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}U^*\varphi_n\|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\||A|^{1/2}\varphi_n\|^2\right)^{1/2},$$

и, поскольку $|A|^{1/2}U^*$ и $|A|^{1/2}$ принадлежат $\mathcal{J}_2$, ряд сходится. Доказательство независимости от выбора базиса дословно то же, что и для $\operatorname{tr} A$, когда $A \geqslant 0$. ∎

Определение. Отображение $\operatorname{tr}\colon \mathcal{J}_1 \to \mathbb{C}$, задаваемое равенством $\operatorname{tr} A = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, A\varphi_n)$, где $\{\varphi_n\}$ — любой ортонормированный базис, называется **следом**.

Отметим, что утверждение: «если $\sum_{n=1}^{\infty} |(\varphi_n, A\varphi_n)| < \infty$ для некоторого ортонормированного базиса, то $A \in \mathcal{J}_1$» — неверно, ибо для того чтобы $A \in \mathcal{J}_1$, сумма должна быть конечной для всех ортонормированных базисов. Спектральная теорема, которая будет доказана в следующей главе, утверждает, что любой самосопряженный оператор A записывается в виде $A_+ - A_-$, где A_+ и A_- положительны и $A_+A_- = 0$. Поэтому неудивительно, что $A \in \mathcal{J}_1$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{tr} A_+ < \infty$, $\operatorname{tr} A_- < \infty$, и в этом случае $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} A_+ - \operatorname{tr} A_-$. Подытожим основные свойства следа:

Теорема VI.25. (a) $\operatorname{tr}(\cdot)$ — линейное отображение;

(b) $\operatorname{tr} A^* = \overline{\operatorname{tr} A}$;

(c) $\operatorname{tr} AB = \operatorname{tr} BA$, если $A \in \mathcal{J}_1$ и $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Доказательство. (a) и (b) очевидны. Для доказательства (c) достаточно рассмотреть лишь унитарные B, ибо любой ограниченный оператор есть сумма четырех унитарных. Но в таком случае

$$\operatorname{tr} AB = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, AB\varphi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (B^*\psi_n, A\psi_n) = \sum_{n=1}^{\infty} (\psi_n, BA\psi_n) = \operatorname{tr} BA,$$

где $\psi_n = B\varphi_n$ для всех n. ∎

Если $A \in \mathcal{J}_1$, то отображение $B \mapsto \operatorname{tr} AB$ есть линейный функционал на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Этим, конечно, не исчерпываются все непрерывные линейные функционалы на $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, однако такие функционалы полностью составляют сопряженное к $\operatorname{Com}(\mathcal{H})$ — пространству компактных операторов. Можно зафиксировать $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и получить линейный функционал на $\mathcal{J}_1$, задаваемый отображением $A \mapsto \operatorname{tr} BA$. Множество таких функционалов образует сопряженное к $\mathcal{J}_1$, снабженному топологией операторной нормы. Сформулируем это утверждение как теорему; интересующиеся доказательством могут найти его набросок в задаче 30.

Теорема VI.26. (a) $\mathcal{J}_1 = [\operatorname{Com}(\mathcal{H})]^*$. Иначе говоря, отображение $A \mapsto \operatorname{tr}(A\,\cdot)$ есть изометрический изоморфизм между $\mathcal{J}_1$ и $[\operatorname{Com}(\mathcal{H})]^*$.

(b) $\mathcal{L}(\mathcal{H}) = \mathcal{J}_1^*$. Иначе говоря, отображение $B \mapsto \operatorname{tr}(B\,\cdot)$ — изометрический изоморфизм между $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{J}_1^*$.

Теперь вернемся к обсуждению различия между слабой операторной топологией на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (см. § VI.1) и слабой банаховой топологией, т. е. $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{L}(\mathscr{H})^*)$. Если $\mathscr{F}$ — семейство операторов конечного ранга, то $\mathscr{F} \subset \mathscr{I}_1$ и каждый оператор $F \in \mathscr{F}$ может быть реализован как линейный функционал на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ посредством сопряженного действия $\mathscr{I}_1$ на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Топология, порождаемая этими функционалами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{F})$, и есть как раз слабая операторная топология. Множество $\mathscr{F}$ не замкнуто относительно $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-нормы. На самом деле $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-норма на $\mathscr{F}$ есть в точности $\|\cdot\|_1$, так что замыкание $\mathscr{F}$ в этой норме есть в точности $\mathscr{I}_1$. Слабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, порождаемая всеми функционалами из $\mathscr{I}_1$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{I}_1)$, называется **ультраслабой топологией** на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Отметим, что она сильнее слабой операторной топологии, поскольку относительно нее большее число функционалов должно быть непрерывным, но слабее, чем слабая банахова топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, поскольку $\mathscr{I}_1$ не есть все сопряженное к $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. На самом деле, поскольку $\mathscr{L}(\mathscr{H}) = \mathscr{I}_1^*$, ультраслабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в точности совпадает со $*$-слабой топологией. Реализация пространства $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ как сопряженного к банахову пространству линейных функционалов, непрерывных в топологии $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \overline{\mathscr{F}})$, возможна для широкого класса алгебр, а не только для $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. В задаче 31 приведен другой пример: мультипликаторная алгебра L^∞ на L^2. Подробно мы будем изучать такие алгебры в гл. XVIII.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ VI.1. Читатель, возможно, смущен обилием топологий, введенных нами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$: слабая, сильная, равномерная операторные топологии, слабая банахова, ультраслабая (§ VI.6). Дальше мы встретим еще и ультрасильную топологию. Зачем нужно вводить все эти топологии? Оказывается, многие интересные операторы задаются как тот или иной предел более простых операторов. И очень важно знать точный смысл предельного перехода и понимать, какие свойства последовательности передаются предельным операторам, подобно тому, как мы знаем, что равномерный предел компактных операторов компактен. Более того, при изучении какой-нибудь проблемы не всегда заранее известно, в каком смысле будут существовать пределы, и потому полезно иметь широкий выбор топологий. Вообще говоря, в т. I и II важны слабая, сильная и равномерная топологии. Ультраслабая и ультрасильная топологии будут играть роль при изучении алгебр фон Неймана. Слабая, сильная и ультрасильная операторные топологии были введены в работе фон Неймана: J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.

§ VI.2. Спектральная теорема для самосопряженных операторов на конечномерных векторных пространствах прекрасно изложена П. Халмошем в книге: Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

§ VI.3. Определения различных типов спектра будут использованы и в случае неограниченных операторов. Теорема VI.5 выполняется, если потребовать,