Теперь вернемся к обсуждению различия между слабой операторной топологией на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ (см. § VI.1) и слабой банаховой топологией, т. е. $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{L}(\mathscr{H})^*)$. Если $\mathscr{F}$ — семейство операторов конечного ранга, то $\mathscr{F} \subset \mathscr{I}_1$ и каждый оператор $F \in \mathscr{F}$ может быть реализован как линейный функционал на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ посредством сопряженного действия $\mathscr{I}_1$ на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Топология, порождаемая этими функционалами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{F})$, и есть как раз слабая операторная топология. Множество $\mathscr{F}$ не замкнуто относительно $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-нормы. На самом деле $\mathscr{L}(\mathscr{H})^*$-норма на $\mathscr{F}$ есть в точности $\|\cdot\|_1$, так что замыкание $\mathscr{F}$ в этой норме есть в точности $\mathscr{I}_1$. Слабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, порождаемая всеми функционалами из $\mathscr{I}_1$, т. е. топология $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \mathscr{I}_1)$, называется **ультраслабой топологией** на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Отметим, что она сильнее слабой операторной топологии, поскольку относительно нее большее число функционалов должно быть непрерывным, но слабее, чем слабая банахова топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, поскольку $\mathscr{I}_1$ не есть все сопряженное к $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. На самом деле, поскольку $\mathscr{L}(\mathscr{H}) = \mathscr{I}_1^*$, ультраслабая топология на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в точности совпадает со $*$-слабой топологией. Реализация пространства $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ как сопряженного к банахову пространству линейных функционалов, непрерывных в топологии $\sigma(\mathscr{L}(\mathscr{H}), \overline{\mathscr{F}})$, возможна для широкого класса алгебр, а не только для $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. В задаче 31 приведен другой пример: мультипликаторная алгебра L^∞ на L^2. Подробно мы будем изучать такие алгебры в гл. XVIII.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ VI.1. Читатель, возможно, смущен обилием топологий, введенных нами на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$: слабая, сильная, равномерная операторные топологии, слабая банахова, ультраслабая (§ VI.6). Дальше мы встретим еще и ультрасильную топологию. Зачем нужно вводить все эти топологии? Оказывается, многие интересные операторы задаются как тот или иной предел более простых операторов. И очень важно знать точный смысл предельного перехода и понимать, какие свойства последовательности передаются предельным операторам, подобно тому, как мы знаем, что равномерный предел компактных операторов компактен. Более того, при изучении какой-нибудь проблемы не всегда заранее известно, в каком смысле будут существовать пределы, и потому полезно иметь широкий выбор топологий. Вообще говоря, в т. I и II важны слабая, сильная и равномерная топологии. Ультраслабая и ультрасильная топологии будут играть роль при изучении алгебр фон Неймана. Слабая, сильная и ультрасильная операторные топологии были введены в работе фон Неймана: J. von Neumann, Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 370—427.

§ VI.2. Спектральная теорема для самосопряженных операторов на конечномерных векторных пространствах прекрасно изложена П. Халмошем в книге: Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

§ VI.3. Определения различных типов спектра будут использованы и в случае неограниченных операторов. Теорема VI.5 выполняется, если потребовать,

чтобы T был замкнутым оператором. Если T ограничен, он, конечно, автоматически замкнут.

Теория аналитических функций со значениями в банаховом пространстве весьма подробно излагается в монографии Э. Хилле и Р. С. Филлипса: Функциональный анализ и полугруппы, ИЛ, М., 1962. Они обсуждают и более сложное понятие аналитической функции из одного банахова пространства в другое. Доказательство теоремы VI.7 можно найти в книге К. Иосиды: Функциональный анализ, «Мир», М., 1967.

Некоторые авторы (например, Иосида или Хилле и Филлипс) используют термин «непрерывный спектр» для обозначения тех $\lambda \in \sigma(T)$, которые не принадлежат ни точечному, ни остаточному спектру. Другие (такие, как Като или Рисс и Надь) используют то определение, которое мы даем в § VII.2. Важное различие этих определений состоит в том, что при нашем определении непрерывная и точечная части спектра могут пересекаться.

§ VI.4. Полярное разложение для линейных преобразований на R^n имеет простой геометрический смысл. Любое такое преобразование A можно записать в виде $A = OS$, где O — ортогональное, а S — самосопряженное преобразования. В силу спектральной теоремы S может быть сжатием, растяжением или аннулированием вдоль определенных ортогональных направлений.

Понятие положительности естественно обобщается на операторные алгебры и будет играть важную роль в наших исследованиях в следующих томах.

Утверждение о том, что неравенство треугольника не выполняется для $|\cdot|$, т. е. что $|A+B|$ может превосходить $|A|+|B|$ (см. задачу 16), — это утверждение о том, что $f(x)=|x|$ не есть выпуклая операторнозначная функция, т. е. неравенство $f(tA+(1-t)B) \leqslant tf(A)+(1-t)f(B)$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ может не иметь места для общих операторов A и B, несмотря на то, что $f(tx+(1-t)y) \leqslant tf(x)+(1-t)f(y)$ при вещественных x и y и $0 \leqslant t \leqslant 1$. Вопрос о том, какие именно матрицы и операторнозначные функции выпуклы, был изучен в работах: F. Krauss, Über konvexe Matrixfunktionen, *Math. Z.*, **41** (1936), 18—42; J. Bendat, S. Sherman, Monotone and Convex Operator Functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **79** (1955), 58—71.

§ VI.5. Доказательство второй части теоремы VI.12 можно найти в книге Иосиды; оно представляет собой красивое применение теорем Асколи—Арцела и Алаоглу (см. также задачу 36).

Теория компактных операторов в прямом смысле берет начало от великой работы Фредгольма об интегральных операторах: I. Fredholm, Sur une classe d'équations fonctionnelles, *Acta Math.*, **27** (1903), 365—390. Фредгольм рассматривал уравнения вида

$$f(x)=g(x)+\lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где g и K — заданные непрерывные функции и $-\infty < a < b < \infty$. Он показал, что существуют явная целая функция $d(\lambda)$, не равная тождественно нулю, и явная функция $D_\lambda(x, y)$, целая по λ и непрерывная по x и y, такие, что если $d(\lambda) \neq 0$, то функция $f(x)=g(x)+d(\lambda)^{-1} \int_a^b D_\lambda(x, y)\, g(y)\, dy$ удовлетворяет исходному уравнению. Более того, он показал, что когда $d(\lambda)=0$, тогда

$$f(x)=\lambda \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy$$

имеет решение $f \neq 0$. Таким образом, работа Фредгольма содержала теорему VI.15 и сформулированное перед ней следствие теоремы VI.14, относящиеся к этому частному случаю. Хорошие изложения теории Фредгольма: W. Lovitt, Linear Integral Equations, Dover, New York, 1950; F. Smithies, Integral Equations, Cambridge Univ. Press, London and New York, 1958.

Работа Фредгольма вызвала заметный интерес у Гильберта и его школы и привела к выделению многих абстрактных понятий теории гильбертовых пространств. Первоначальное определение вполне непрерывных операторов, данное Гильбертом, на современном языке звучит как критерий теоремы VI.11: D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearer Integralgleichungen, I—VI, *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen Math.-Phys. Kl.* (1904), 49—91; (1905), 213—259, 307—388; (1906), 157—222, 439—480; (1910), 355—417; особенно IV. Распространение понятия компактного оператора на произвольные банаховы пространства с помощью критерия предкомпактности принадлежит Ф. Риссу: F. Riesz, Über lineare Funktionalgleichungen, *Acta Math.*, 41 (1918), 71—98.

Теорема VI.12b принадлежит Шаудеру: J. Schauder, Über lineare, vollstetige Funktionaloperationen, *Studie Math.*, 2 (1930), 183—196.

Идея использовать теорему VI.13 для развития общей теории высказана Шмидтом: E. Schmidt, Autlösung der allgemeinen linearen Integralgleichung, *Math. Ann.*, 64 (1907), 161—174. Вопрос о том, является ли каждый компактный оператор в общем банаховом пространстве равномерным пределом операторов конечного ранга, открыт. Современное обсуждение этой проблемы см. в работе: I. Singer, Bases in Banach Spaces, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1970.

Теорема VI.14, ее следствие и теорема VI.15 справедливы в произвольном банаховом пространстве. Их доказательства в этом случае даны у Н. Данфорда и Дж. Шварца, Линейные операторы, т. I, ИЛ, М., 1962. Техника нашего доказательства теоремы VI.14 заимствована из приложения к работе: W. Hunziker, On the Spectra of Schrödinger Multiparticle Hamiltonians, *Helv. Phys. Acta*, 39 (1966), 451—462. Аналогичный подход можно найти в приложении к статье: G. Tiktopolous, Analytic Continuation in Complex Angular Momentum and Integral Equations, *Phys. Rev.*, **133B** (1964), 1231—1238. Одна часть теоремы VI.14 для общего случая Данфордом и Шварцем не доказана; обсуждение этого вопроса можно найти в работе S. Steinberg, Meromorphic Families of Compact Operators, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, **31** (1968), 372—379. По поводу распространения теории на локально выпуклые пространства см.: J. Leray, Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes, *Acta Sci. Math. Szegal*, **12**, Part B (1950), 177—186.

Теорема VI.15 была впервые установлена Риссом и Шаудером в цитированных выше работах (Шаудер восполнил некоторые детали общего случая), а теорема VI.16 принадлежит Гильберту и Шмидту и содержится в указанных выше работах этих авторов.

Обсуждение использования интегральных уравнений при решении задачи Дирихле см. в книге: Ivor Stakgold, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, v. 2, Macmillan, New York, 1968 (особенно разделы 6.4 и 6.5).

§ *VI.6*. Обсуждение $\mathcal{I}_1$, $\mathcal{I}_2$ и аналогичных множеств $\mathcal{I}_p$ проведено в книге: R. Schatten, Norm Ideals of Completely Continuous Operators, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1960. Множество $\mathcal{I}_p$ определяется как совокупность таких A, для которых $\operatorname{Tr}(|A|^p) < \infty$; оно состоит из тех и только тех компактных операторов, для которых $\sum |\lambda_n|^p < \infty$.

Понятие норм-идеалов было распространено на другие множества операторов, допускающих введение следа (алгебры фон Неймана), и на более общие объекты Сигалом: I. Segal, A Non-commutative Extension of Abstract Integration, *Ann. Math.*, 57 (1953), 401—457; 58 (1953), 595—596, и Кунце: R. A. Kunze, L_p Fourier Transforms on Locally Compact Unimodular Groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 519. При этом использовались методы, подчеркивающие аналогию с L^p.