ЗАДАЧИ

†*1*. Докажите, что слабая операторная топология слабее сильной операторной топологии, которая в свою очередь слабее равномерной операторной топологии.

†*2*. Докажите утверждения примера в § VI.1.

3. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что если $T_n \in \mathscr{L}(X, Y)$ и $\{T_n x\}$ — последовательность Коши для каждого $x \in X$, то в $\mathscr{L}(X, Y)$ существует такой T, что $T_n \to T$ сильно.

*(b) Верно ли утверждение (a), когда вместо T_n рассматривается направленность T_α?

4. (a) Пусть X и Y — банаховы пространства. Докажите, что теорема, аналогичная теореме V.1, справедлива и для $\mathscr{L}(X, Y)$, если Y слабо секвенциально полно (это означает, что каждая слабая последовательность Коши имеет слабый предел).

(b) Докажите, что если банахово пространство рефлексивно, то оно слабо секвенциально полно.

5. (a) Пусть T_t: $\varphi(x) \to \varphi(x+t)$ — оператор на $L^2(\mathbb{R})$. Какова норма T_t? К какому оператору сходится T_t, когда $t \to \infty$, и в какой топологии?

(b) Ответьте на те же вопросы для T_t, действующих в $L^2(\mathbb{R}, e^{-x^2}dx)$.

6. (a) Пусть $\mathscr{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство. Предположим, что заданы ε, ψ и ортонормированные векторы $\psi_1, \ldots, \psi_n$. Покажите, что существуют такие A и B, что $\|A\psi_i\| < \varepsilon$, $\|B\psi_i\| = \varepsilon$; $i = 1, \ldots, n$, но $\|AB\psi\| > 1$.

(b) Докажите, что умножение как операция из $\mathscr{L}(\mathscr{H}) \times \mathscr{L}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ не непрерывно, когда $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ наделено сильной топологией.

(c) Предположим, что $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ и $\{B_\alpha\}_{\alpha \in I}$ — *направленности*. Пусть $A_\alpha^* \xrightarrow{s} A^*$, $A_\alpha \xrightarrow{s} A$, $B_\alpha \xrightarrow{s} B$. Докажите, что $A_\alpha B_\alpha \xrightarrow{w} AB$.

(d) Пусть A_n, B_n — *последовательности*, такие, что $A_n \xrightarrow{s} A$, $B_n \xrightarrow{s} B$. Докажите, что $A_n B_n \xrightarrow{s} AB$.

(e) Пусть A_n, B_n — *последовательности*, такие, что $A_n \xrightarrow{w} A$, $B_n \xrightarrow{w} B$. Приведите пример, когда утверждение $A_n B_n \xrightarrow{w} AB$ *неверно*.

7. Приведите пример, показывающий, что область значений ограниченного оператора может не быть замкнутой. Докажите, что если T ограничен, задан всюду и изометричен, то $\operatorname{Ran} T$ замкнута.

†*8*. (a) Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве. Докажите, что его собственные значения вещественны и что собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.

(b) Выведите из доказательства теоремы VI.8 универсальную (но зависящую от λ) оценку нормы резольвенты самосопряженного оператора при невещественных $\lambda \in \mathbb{C}$.

9. (a) Пусть A — самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Докажите, что

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Указание. Сначала заметьте, что

$$\operatorname{Re}(\psi, A\phi) = {}^1/_4\,[(\psi+\phi, A(\psi+\phi)) - (\psi-\phi, A(\psi-\phi))].$$

Затем, используя неравенство

$$|(\eta, A\eta)| \leqslant \|\eta\|^2 \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta, A\eta)|$$

и тождество параллелограмма, докажите, что

$$|(\psi, A\phi)| \leqslant \sup_{\|\eta\|=1} |(\eta, A\eta)|,$$

если $\|\phi\| = \|\psi\| = 1$.

(b) Найдите пример, показывающий, что утверждение пункта (a) может быть неверно, если A не самосопряжен.

10. Покажите, что спектральный радиус интегрального оператора Вольтерра

$$(Tf)(x) = \int_0^x f(y)\,dy,$$

рассматриваемого как отображение $C[0, 1]$ в себя, равен нулю. Какова норма T?

†*11*. Пусть $T \in \mathscr{L}(X)$. Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|T^n\|^{1/n}$ существует и равен $\inf\limits_n \|T^n\|^{1/n}$; действуйте следующим образом:

(a) Положите $a_n = \log\|T^n\|$ и докажите, что $a_{m+n} \leqslant a_m + a_n$.

(b) Для фиксированного натурального m положите $n = mq + r$, где q и r — натуральные числа и $0 \leqslant r \leqslant m-1$. С помощью (a) выведите, что

$$\overline{\lim_n}\,\frac{a_n}{n} \leqslant \frac{a_m}{m}.$$

(c) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n/n) = \inf\limits_n (a_n/n)$, т. е. требуемое равенство.

†*12*. Докажите предложение в конце § VI.3.

13. (a) Дайте пример, показывающий, что линейное преобразование пространства $\mathbf{C}^n$ может быть положительным, несмотря на то что все его матричные элементы не положительны.

*(b) Выведите необходимое и достаточное условие положительности $n\times n$-матрицы.

14. (a) Докажите, что если $A_n \geqslant 0$, $A_n \to A$ по норме, то $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ по норме.

(b) Предположим, что $\{A_n \geqslant 0\}$ — последовательность и $A_n \to A$ сильно. Докажите, что $\sqrt{A_n} \to \sqrt{A}$ сильно.

15. (a) Пусть $A_n \to A$ по норме. Докажите, что $|A_n| \to |A|$ по норме.

(b) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность, и $A_n \to A$, $A_n^* \to A^*$ сильно. Докажите, что $|A_n| \to |A|$ сильно.

(c) Найдите пример, показывающий, что отображение $|\cdot|$ не является слабо непрерывным на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$.

16. Пусть $\sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Докажите, что неравенство

$$|(\sigma_3+1)+(\sigma_1-1)| \leqslant |(\sigma_3+1)| + |(\sigma_1-1)|$$

неверно. *Замечание*: этот пример принадлежит Э. Нельсону.

17. Докажите, что неравенство

$$\| |A| - |B| \| \leqslant \| A - B \|$$

не обязательно верно. [*Указание*: см. задачу 16.]

†*18*. (a) Докажите предложение, предшествующее теореме VI.10.
(b) Докажите единственность, утверждаемую теоремой VI.10.

19. Запишите матрицу $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ как произведение вращения и положительной симметричной матрицы.

**20*. Предположим, что X — рефлексивное банахово пространство и что T: $X \longrightarrow X$ — ограниченный линейный оператор. Докажите, что если T переводит слабо сходящуюся последовательность в равномерно сходящуюся, то T компактен.

†*21*. Завершите доказательство теоремы VI.14, распространив доказанный в тексте результат на все пространство D.

22. С помощью теоремы Стоуна — Вейерштрасса докажите, что любой интегральный оператор Фредгольма на $C[a, b]$

$$(Tf)(x) = \int_a^b K(x, y) f(y)\, dy,$$

где K — непрерывная функция, есть равномерный предел операторов конечного ранга.

†*23*. (a) Докажите, что $\| A \| \leqslant \| A \|_1$.
(b) Предположим, что $\{A_n\}$ — последовательность Коши относительно $\|\cdot\|_1$. Покажите, что $\{A_n\}$ имеет $\|\cdot\|$-предел A и что $\operatorname{tr}|A| < \infty$. После этого завершите доказательство теоремы VI.20, показав, что A есть $\|\cdot\|_1$-предел $\{A_n\}$.

†*24*. (a) Используя каноническую форму, данную в теореме VI.17, докажите второе утверждение теоремы VI.21.
(b) Докажите следствие теоремы VI.21.

†*25*. Пусть $K \in L^2(M \times M, d\mu \otimes d\mu)$, и пусть A_K — интегральный оператор

$$(A_K \varphi)(x) = \int_M K(x, y) \varphi(y)\, d\mu(y).$$

Докажите, что A_K корректно определен и что $\| A_K \| \leqslant \| K \|_{L^2}$.

26. (a) Докажите, что если $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_n)| < \infty$ для всех ортонормированных базисов, то $A \in \mathcal{J}_1$.
(b) Найдите такой $A \notin \mathcal{J}_1$, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |(A\varphi_n, \varphi_n)| < \infty$ для некоторого фиксированного ортонормированного базиса.

27. Докажите, что $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$, если $A, B \in \mathcal{J}_2$.

28. Докажите, что (a) $\| AB \|_1 \leqslant \| A \| \| B \|_1$,
(b) $\| AB \|_2 \leqslant \| A \| \| B \|_2$,
(c) $\| AB \|_1 \leqslant \| A \|_2 \| B \|_2$.

†29. Докажите, что $A \in \mathfrak{I}_1$ тогда и только тогда, когда $A = BC$, где $B, C \in \mathfrak{I}_2$.

†30. Цель этой задачи — доказательство теоремы VI.26.
(a) Пусть f — ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$.
Пусть $(\psi, \cdot)\phi$ — оператор на $\mathscr{H}$, переводящий η в $(\psi, \eta)\phi$. Покажите, что существует ограниченный линейный оператор B, такой, что
$$(\psi, B\phi) = f[(\psi, \cdot)\phi].$$
(b) Используя равенство
$$\sum_{n=1}^{N} (\phi_n, |B|\phi_n) = f\left[\sum_{n=1}^{N} (U\phi_n, \cdot)\phi_n\right],$$
докажите, что $B \in \mathfrak{I}_1$ и $\|B\|_1 \leqslant \|f\|_{\mathrm{Com}(\mathscr{H})^*}$.
(c) Докажите, что $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ — ограниченный линейный функционал на $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$, равный на самом деле $f(\cdot)$.
(d) Докажите, что $\|B\|_1 = \|f\|_{\mathrm{Com}(\mathscr{H})^*}$.
(e) Пусть g — ограниченный линейный функционал на $\mathfrak{I}_1$. Покажите, что существует единственный ограниченный линейный оператор B, такой, что
$$(\psi, B\phi) = g[(\psi, \cdot)\phi].$$
(f) Докажите, что $A \mapsto \mathrm{tr}(BA)$ — ограниченный линейный функционал на $\mathfrak{I}_1$, который совпадает с g, и что $\|g\|_{\mathfrak{I}_1^*} = \|B\|$.

31. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $L^\infty(M, d\mu)$ действует на $\mathscr{H} = L^2(M, d\mu)$ в том смысле, что
$$(T_f\varphi)(x) = f(x)\varphi(x).$$
Докажите, что топология на L^∞, индуцированная слабой операторной топологией на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, тождественна $*$-слабой топологии, индуцированной на L^∞ пространством L^1.

32. Пусть $C[0, 1]$ действует на $L^2[0, 1]$, как в задаче 31. Найдите последовательность в $C[0, 1]$, сходящуюся в слабой операторной топологии на $C[0, 1]$ к $f \in C[0, 1]$, но не сходящуюся в слабой банаховой топологии на $C[0, 1]$.

33. Рассмотрим $\mathfrak{I}_2$ как гильбертово пространство с внутренним произведением $(A, B)_2 = \mathrm{tr}(A^*B)$. Пусть $A \mapsto L_A$ и $A \mapsto R_A$ — отображения $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{I}_2)$, определяемые формулами
$$L_A(B) = AB, \qquad R_A(B) = BA^*.$$
(a) Докажите, что $A \mapsto L_A$ — гомоморфизм $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{I}_2)$.
(b) Докажите, что $A \mapsto R_A$ — сопряженно-линейный гомоморфизм $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ в $\mathscr{L}(\mathfrak{I}_2)$.
(c) Предположим, что $C \in \mathscr{L}(\mathfrak{I}_2)$ и удовлетворяет условию $CL_A = L_AC$ для всех $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$. Докажите, что $C = R_B$ для некоторого $B \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$.

*34. Покажите, что в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ отображение $T: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ непрерывно из слабой топологии в равномерную (т. е. $Tx_\alpha \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$, если $x_\alpha \xrightarrow{w} x$ для произвольной *направленности*) тогда и только тогда, когда T имеет конечный ранг! (Ср. с теоремой VI.11.)

35. (a) Предположим, что T — оператор на $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой, что если $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} x$, то $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$. Докажите, что T ограничен (так что $Tx_n \xrightarrow{\|\cdot\|} Tx$).

(b) Опишите непрерывные линейные отображения $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ в себя, если и область определения, и область значений наделены слабой топологией.

36. Докажите пункт (b) теоремы VI.12, когда $X=Y$ — гильбертово пространство, используя пункт (c) теоремы VI.12 и полярное разложение.

†37. Докажите пункт (c) теоремы VI.12.

38. Пусть P и Q — ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что $PQ=QP$.
(a) Докажите, что $1-P$, $1-Q$, PQ, $P+Q-PQ$ и $P+Q-2PQ$ — ортогональные проекторы.
(b) Как области значений проекторов из (a) связаны с $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$?

*39. Пусть P и Q — ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{M}$ и $\mathcal{N}$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Докажите, что $\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}(PQ)^n$ существует и есть ортогональный проектор на $\mathcal{M}\cap\mathcal{N}$.

*40. Пусть $\mathcal{J}$ — равномерно (т. е. по норме $\|\cdot\|$) замкнутый идеал в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, $\mathcal{J}\neq 0$. Докажите, что $\mathrm{Com}(\mathcal{H})\subset\mathcal{J}$, показав, что любой оператор конечного ранга лежит в $\mathcal{J}$.

Замечание. Как мы увидим далее (задача 31 гл. VII), в случае, когда $\mathcal{H}$ — сепарабельное пространство, единственными равномерно замкнутыми идеалами являются $\{0\}$, $\mathrm{Com}(\mathcal{H})$, $\mathcal{L}(\mathcal{H})$.

41. Найдите неортогональный проектор, действующий на $\mathbb{R}^2$.

42. Пусть $A\in\mathcal{L}(X)$. Докажите, что множество таких λ, что $\lambda\in\sigma(A)$, но не является собственным значением, а $\mathrm{Ran}(\lambda I-A)$ замкнута, но не совпадает со всем X, открыто в $\mathbb{C}$.

43. Пусть M и N — такие подпространства банахова пространства X, что $M+N=X$ и $M\cap N=\{0\}$. Пусть P — проектор пространства X на M. Докажите, что P ограничен тогда и только тогда, когда и M и N замкнуты.

44. (a) Определим числовую область значений $N(T)$ ограниченного оператора T на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ соотношением $N(T)=\{(\psi, T\psi)\mid\psi\in\mathcal{H}, \|\psi\|=1\}$. Докажите, что $\sigma(T)\subset\overline{N(T)}$. [*Указание.* Сначала покажите, что $\lambda\in N(T)$, если λ — собственное значение T или T^*; затем докажите, что в случае, когда $\lambda\in\sigma(T)$, но λ не есть собственное значение T или T^*, можно найти такую последовательность $\psi_n\in\mathcal{H}$, что $\|(T-\lambda)\psi_n\|\to 0$.]
(b) Найдите пример оператора, у которого область $N(T)$ незамкнута и $\sigma(T)\not\subset N(T)$.
(c) Найдите пример оператора, для которого $\sigma(T)\neq N(T)=\overline{N(T)}$.
Замечание. Глубокий результат Хаусдорфа утверждает, что $N(T)$ — выпуклое множество.

45. (a) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть A — такой оператор, что

$$\sup_{\substack{\psi\in[\phi_1,\ldots,\phi_n]^{\perp}\\ \|\psi\|=1}}\|A\psi\|\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Докажите, что A — компактный оператор.

(b) Пусть $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и A — компактный оператор. Докажите, что

$$\sup_{\psi \in [\phi_1, \ldots, \phi_n]^{\perp}} \|A\psi\| \longrightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \longrightarrow \infty.$$

(a) Пусть A — компактный оператор и $A \geqslant 0$. Докажите, что $A^{1/2}$ — тоже компактный оператор. (*Указание:* используйте задачу 45.)

(b) Пусть $0 \leqslant A \leqslant B$. Докажите, что A — компактный оператор, если B компактен. (*Указание:* с помощью задачи 45 и пункта (a) докажите, что компактен оператор $A^{1/2}$.)

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ — два гильбертовых пространства. Если T — ограниченное линейное отображение из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$, то определим T^*: $\mathcal{H}' \longrightarrow \mathcal{H}$ равенством $(T^*\psi, \phi)_{\mathcal{H}} = (\psi, T\phi)_{\mathcal{H}'}$. Оператор T называется *оператором Гильберта—Шмидта*, если T^*T: $\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H}$ — оператор со следом. Пусть T — оператор Гильберта—Шмидта. Докажите, что существуют вещественные числа $\lambda_n > 0$ и ортонормированные множества $\{\phi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{H}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{N} \in \mathcal{H}'$, такие, что

$$T\phi = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\phi_n, \phi)\, \psi_n.$$

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{H}'$ — два гильбертовых пространства и $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$ — множество операторов Гильберта—Шмидта из $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}'$.

(a) Докажите, что множество $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}, \mathcal{H}')$, снабженное внутренним произведением

$$(S, T) = \operatorname{Tr}_{\mathcal{H}}(S^*T),$$

есть гильбертово пространство.

(b) Для заданных $\psi \in \mathcal{H}$, $\phi \in \mathcal{H}'$ и любого $l \in \mathcal{H}^*$ зададим отображение $I(\psi, \phi) \in \mathcal{J}_2(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}')$ равенством $I(\psi, \phi)\, l = l(\psi)\, \phi$. Докажите, что отображение $\mathcal{J}$, переводящее $\psi \otimes \phi$ в $I(\psi, \phi)$, определено корректно и продолжается до изометрии между $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ и $\mathcal{J}_2(\mathcal{H}^*, \mathcal{H}')$.

(c) Покажите, что для заданного $\eta \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}'$ существуют вещественные числа $\lambda_n > 0$ и ортонормированные множества $\{\phi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{H}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{N} \subset \mathcal{H}'$ с конечным или бесконечным N, такие, что

$$\sum_{n=1}^{N} |\lambda_n|^2 = \|\eta\|^2 \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{N} \lambda_n \phi_n \otimes \psi_n = \eta.$$