VII. СПЕКТРАЛЬНАЯ ТЕОРЕМА

Математические доказательства, как алмазы, тверды и прозрачны и поддаются лишь самой строгой логике.

ДЖОН ЛОКК, «ВТОРОЙ ОТВЕТ ЕПИСКОПУ ВУСТЕРСКОМУ»

VII. 1. Функциональное исчисление непрерывных функций

В этой главе мы обсудим спектральную теорему в ее многочисленных обличьях. Эта структурная теорема дает конкретное описание всех самосопряженных операторов. Есть несколько на вид различных формулировок спектральной теоремы, но в каком-то смысле все они эквивалентны.

Мы предпочитаем ту из них, которая утверждает, что каждый ограниченный самосопряженный оператор есть оператор умножения. (Здесь подчеркивается слово «ограниченный», так как неограниченными самосопряженными операторами мы специально займемся в следующей главе. Для них также имеет место спектральная теорема, которую мы обсудим в § VIII.3.) Это означает, что для любого ограниченного самосопряженного оператора на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ можно найти меру μ на пространстве с мерой M и унитарный оператор U: $\mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)(x) = F(x)f(x),$$

где F—некоторая ограниченная вещественнозначная измеримая функция на M.

Очевидно, что это—обобщение конечномерной теоремы, утверждающей, что произвольная самосопряженная $n \times n$-матрица приводится к диагональному виду, или в абстрактной форме: для любого самосопряженного оператора A на n-мерном комплексном пространстве V существуют унитарный оператор U: $V \to \mathbb{C}^n$ и вещественные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)_i = \lambda_i f_i$$

для любого $f = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$ в $\mathbb{C}^n$.

Практически множество M будет объединением какого-то числа экземпляров вещественной прямой $\mathbb{R}$, а F будет совпадать с x, так что решающим моментом доказательства окажется построение соответствующих мер. Это будет проделано в § VII.2 при помощи теоремы Рисса—Маркова. Сейчас мы выясним смысл выражения $f(A)$, где f—непрерывная функция. А в следующем разделе рассмотрим меры, порождаемые функционалами $f \mapsto \langle\psi, f(A)\psi\rangle$, где ψ—заданный вектор из $\mathcal{H}$.

Пусть дан оператор A. Для каких функций f можно определить $f(A)$? Предположим сначала, что A—произвольный ограниченный оператор. Прежде всего желательно, чтобы в случае, когда f—полином, т. е. когда $f(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, выполнялось равенство $f(A)=\sum_{n=0}^{N} a_n A^n$. Далее, если $f(x)$ представляется в виде степенного ряда $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ с радиусом сходимости R и если для нормы оператора A выполняется неравенство $\|A\|<R$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$ сходится в $\mathcal{L}(\mathcal{H})$, и естественно положить $f(A)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n A^n$. При этом, очевидно, функция f аналитична в области, включающей весь спектр $\sigma(A)$. И в общем случае можно дать разумное определение величины $f(A)$, если f аналитична в некоторой окрестности спектра оператора A (см. Замечания).

Функциональное исчисление, о котором мы говорили до сих пор, применимо в случае любого оператора в произвольном банаховом пространстве. Специальное отличие самосопряженных операторов (или, более общо, нормальных операторов; см. задачи 3, 5) состоит в том, что $\|P(A)\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|$ для любого полинома P; это позволяет пользоваться теоремой об ограниченном линейном отображении для расширения функционального исчисления на непрерывные функции. В этом разделе наша главная цель—доказать следующую теорему:

Теорема VII.1 (функциональное исчисление непрерывных функций). Пусть A—самосопряженный ограниченный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует *единственное* отображение ϕ: $C(\sigma(A)) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$ со следующими свойствами:

(a) отображение ϕ есть алгебраический $*$-гомоморфизм, т. е.
$$\phi(fg)=\phi(f)\phi(g), \qquad \phi(\lambda f)=\lambda\phi(f),$$
$$\phi(1)=I, \qquad \phi(\bar{f})=\phi(f)^*;$$

(b) отображение ϕ непрерывно, т. е. $\|\phi(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leqslant C\|f\|_\infty$;

(c) если $f(x)=x$, то $\phi(f)=A$.

Кроме того, ϕ имеет ряд дополнительных свойств:

(d) если вектор $\psi\in\mathcal{H}$ таков, что $A\psi=\lambda\psi$, то $\phi(f)\psi=f(\lambda)\psi$;

(e) $\sigma[\phi(f)]=\{f(\lambda)\mid\lambda\in\sigma(A)\}$ (теорема о спектре отображения);

(f) если $f\geqslant 0$, то $\phi(f)\geqslant 0$;

(g) $\|\phi(f)\|=\|f\|_\infty$ (усиление свойства (b)).

В дальнейшем, чтобы подчеркнуть зависимость отображения $\phi(f)$ от A, мы вместо $\phi(f)$ иногда будем писать $\phi_A(f)$ или $f(A)$.

Идея приводимого ниже доказательства весьма проста. Свойства (а) и (с) однозначно определяют значение $\phi(P)$ для любого полинома $P(X)$. По теореме Вейерштрасса множество полиномов плотно в $C(\sigma(A))$. Таким образом, главное в доказательстве — проверить равенство

$$\| P(A)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})} = \| P(x)\|_{C(\sigma(A))} = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

После этого существование и единственность отображения ϕ будут следовать из теоремы об ограниченном линейном отображении.

Для доказательства этого важного равенства мы предварительно докажем один частный случай свойства (е) (справедливый, однако, для произвольных ограниченных операторов).

Лемма 1. Пусть задан полином $P(x)=\sum_{n=0}^{N} a_n x^n$, и пусть $P(A) = \sum_{n=0}^{N} a_n A^n$. Тогда $\sigma(P(A)) = \{P(\lambda)\mid \lambda\in\sigma(A)\}$.

Доказательство. Пусть $\lambda\in\sigma(A)$. Так как $x=\lambda$ — корень полинома $P(x)-P(\lambda)$, то существует полином $Q(x)$, такой, что $P(x)-P(\lambda)=(x-\lambda)Q(x)$. Следовательно, $P(A)-P(\lambda) = (A-\lambda)Q(A)$. Так как оператор $(A-\lambda)$ не имеет обратного, это же справедливо и для $P(A)-P(\lambda)$, т. е. $P(\lambda)\in\sigma(P(A))$.

Обратно, пусть $\mu\in\sigma(P(A))$, и пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ — корни полинома $P(x)-\mu$, т. е. $P(x)-\mu=a(x-\lambda_1)\ldots(x-\lambda_n)$. Если $\lambda_1, \ldots, \lambda_n\notin\sigma(A)$, то существует оператор

$$(P(A)-\mu)^{-1}=a^{-1}(A-\lambda_1)^{-1}\ldots(A-\lambda_n)^{-1},$$

что противоречит исходному предположению. Таким образом, некоторые λ_i принадлежат $\sigma(A)$, т. е. существуют такие $\lambda\in\sigma(A)$, что $\mu=P(\lambda)$. ∎

Лемма 2. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда

$$\|P(A)\| = \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|.$$

Доказательство.
$$\begin{aligned}
\|P(A)\|^2 &= \|P(A)^* P(A)\| = \\
&= \|(\bar{P}P)(A)\| = \\
\text{(по теореме VI.6)}\quad &= \sup_{\lambda\in\sigma((\bar{P}P)(A))} |\lambda| = \\
\text{(по лемме 1)}\quad &= \sup_{\lambda\in\sigma(A)} |(\bar{P}P)(\lambda)| = \Big(\sup_{\lambda\in\sigma(A)} |P(\lambda)|\Big)^2. \ ∎
\end{aligned}$$

Доказательство теоремы VII.1. Положим $\phi(P)=P(A)$. Тогда $\|\phi(P)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}=\|P\|_{C(\sigma(A))}$, так что отображение ϕ имеет единственное линейное продолжение на замыкание множества полиномов в $C(\sigma(A))$. Так как полиномы образуют алгебру, содержащую единицу, замкнутую относительно комплексного сопряжения и разделяющую точки спектра, то такое замыкание по теореме Стоуна—Вейерштрасса для комплексного случая (теорема IV.10) дает все пространство $C(\sigma(A))$. Свойства (a), (b), (c) и (g) очевидны. Если некоторое отображение $\tilde{\phi}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (c), то оно совпадает с ϕ на полиномах, а тогда, по непрерывности, и на $C(\sigma(A))$. Свойство (d) выводится также с помощью непрерывности из равенства $\phi(P)\psi=P(\lambda)\psi$. Чтобы доказать свойство (f), заметим, что если $f\geqslant 0$, то $f=g^2$, где g—вещественная функция и $g\in C(\sigma(A))$. Отсюда $\phi(f)=\phi(g)^2$, где оператор $\phi(g)$—самосопряженный, а значит, $\phi(f)\geqslant 0$. Доказательство свойства (e) мы оставляем читателю (задача 8). ∎

Прежде чем обратиться к примерам, сделаем несколько замечаний.

(1) $\phi(f)\geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $f\geqslant 0$ (задача 9).

(2) Множество $\{f(A)\,|\,f\in C(\sigma(A))\}$ образует абелеву алгебру, инвариантную относительно сопряжения, так как для любых f и g имеем $fg=gf$. В силу равенства $\|f(A)\|=\|f\|_\infty$ и полноты пространства $C(\sigma(A))$, множество $\{f(A)\,|\,f\in C(\sigma(A))\}$ замкнуто по норме. Таким образом, оно является **абелевой C^*-алгеброй** операторов.

(3) $\operatorname{Ran}\phi$ совпадает с **C^*-алгеброй, порождаемой оператором** A, т. е. наименьшей C^*-алгеброй, содержащей A (задача 10).

(4) Утверждение об изометрической изоморфности $C(\sigma(A))$ и C^*-алгебры, порождаемой оператором A, в действительности является частным случаем теоремы Гельфанда—Наймарка для коммутативных алгебр, рассматриваемой в гл. XV.

(5) Легко показать, что свойство (b) следует из (a) и несложного абстрактного утверждения (задача 11). Итак, уже (a) и (c) однозначно определяют отображение ϕ.

В заключение мы рассмотрим два конкретных примера $\phi(f)$.

Пример 1. Как следствие мы получаем новое доказательство леммы о квадратном корне (теоремы VI.9) в той части, где говорится о существовании. Действительно, если $A\geqslant 0$, то $\sigma(A)\subset$ $\subset[0,\infty)$ (задача 12), и если $f(x)=x^{1/2}$, то $f(A)^2=A$.

Пример 2. Из пункта (g) теоремы VII.1 очевидно, что $\|(A-\lambda)^{-1}\|=[\operatorname{dist}(\lambda,\sigma(A))]^{-1}$, если A ограничен и самосопряжен, а $\lambda\notin\sigma(A)$.