VII.2. Спектральные меры

Теперь мы готовы ввести те меры, о которых уже несколько раз говорили выше. Пусть задан некоторый ограниченный самосопряженный оператор A, и пусть $\psi \in \mathcal{H}$. Тогда отображение $f \mapsto (\psi, f(A)\psi)$ является положительным линейным функционалом на $C(\sigma(A))$. Таким образом, по теореме Рисса—Маркова (теорема IV.14) существует единственная мера μ_ψ на компактном множестве $\sigma(A)$, такая, что $(\psi, f(A)\psi) = \int\limits_{\sigma(A)} f(\lambda)\, d\mu_\psi$.

Определение. Мера μ_ψ называется **спектральной мерой, ассоциированной с вектором** ψ.

Первое и простейшее применение меры μ_ψ—это возможность расширения функционального исчисления на множество $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ограниченных борелевых функций на $\mathbb{R}$. Пусть $g \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Естественно определить $g(A)$ так, чтобы $(\psi, g(A)\psi) = \int\limits_{\sigma(A)} g(\lambda)\, d\mu_\psi(\lambda)$. Матричный элемент $(\psi, g(A)\phi)$ может быть вычислен теперь с помощью поляризационного тождества, а лемма Рисса позволяет построить оператор $g(A)$. «Правила» такого «функционального исчисления измеримых функций» дает следующая

Теорема VII.2 (спектральная теорема в терминах функционального исчисления). Пусть A—ограниченный самосопряженный оператор на $\mathcal{H}$. Существует единственное отображение $\hat{\phi}$: $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$, такое, что

(a) $\hat{\phi}$—алгебраический $*$-гомоморфизм;
(b) $\hat{\phi}$ непрерывно по норме: $\|\hat{\phi}(f)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leqslant \|f\|_\infty$;
(c) если $f(x) = x$, то $\hat{\phi}(f) = A$;
(d) если $f_n(x) \longrightarrow f(x)$ для любого x, а совокупность норм $\|f_n\|_\infty$ ограничена, то $\hat{\phi}(f_n) \longrightarrow \hat{\phi}(f)$ *сильно.*

Кроме того, отображение $\hat{\phi}$ обладает следующими свойствами:

(e) если $A\psi = \lambda\psi$, то $\hat{\phi}(f)\psi = f(\lambda)\psi$;
(f) если $f \geqslant 0$, то $\hat{\phi}(f) \geqslant 0$;
(g) если $BA = AB$, то $\hat{\phi}(f)B = B\hat{\phi}(f)$.

В задаче 13 мы предлагаем читателю самостоятельно доказать эту теорему. После того как доказана теорема VII.1, единственная нетривиальная часть—проверка пункта (d), которая требует применения теоремы о мажорированной сходимости. Отображение $\hat{\phi}$ расширяет ϕ, и, как и выше, мы будем писать $\hat{\phi}(f) = f(A)$.

Как и в функциональном исчислении непрерывных функций, справедливо равенство $f(A)g(A)=g(A)f(A)$.

Поскольку $\mathscr{B}(\mathbb{R})$ — наименьшее семейство, замкнутое относительно сходимости, использованной в пункте (d), и содержащее все $C(\mathbb{R})$, мы знаем, что всевозможные $\hat{\phi}(f)$ лежат в наименьшей C^*-алгебре, содержащей оператор A, которая также сильно замкнута. Такие алгебры называются алгебрами фон Неймана, или W^*-алгебрами. Когда мы в гл. XVIII займемся алгебрами фон Неймана, мы увидим, что приведенное утверждение следует из (g).

Равенство норм, указанное в теореме VII.1, можно расширить, если определить норму $\|f\|'_\infty$ как L^∞-норму по отношению к должным образом введенному понятию «почти всюду» (п.в.). Действительно, выберем какой-либо ортонормированный базис $\{\psi_n\}$ в $\mathscr{H}$ и будем говорить, что некоторое свойство имеет место п.в., если оно имеет место почти всюду по *каждой* мере μ_{ψ_i}. Тогда $\|\hat{\phi}(f)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}=\|f\|'_\infty$.

В следующем разделе мы обратимся к операторам $\chi_\Omega(A)$, где χ_Ω — характеристическая функция. Это наиболее важный набор операторов в функциональном исчислении измеримых, но не непрерывных функций. А сейчас мы займемся построением пространств L^2 с помощью спектральных мер. Прежде всего введем такое

Определение. Вектор $\psi\in\mathscr{H}$ называется **циклическим вектором** оператора A, если множество конечных линейных комбинаций элементов $\{A^n\psi\}_{n=0}^\infty$ плотно в $\mathscr{H}$.

Не все операторы имеют циклические векторы (задача 14), но если такой вектор существует, то выполняется

Лемма 1. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор с циклическим вектором ψ. Тогда существует унитарный оператор $U\colon \mathscr{H}\to L^2(\sigma(A),\, d\mu_\psi)$, такой, что

$$(UAU^{-1}f)(\lambda)=\lambda f(\lambda),$$

причем равенство здесь понимается в смысле $L^2(\sigma(A),\, d\mu_\psi)$.

Доказательство. Определим отображение U формулой $U\phi(f)\psi\equiv f$, где f непрерывна. По существу, U обратно к отображению ϕ из теоремы VII.1. Чтобы показать, что U корректно определено, вычислим

$$\|\phi(f)\psi\|^2=(\psi,\ \phi^*(f)\phi(f)\psi)=(\psi,\ \phi(\bar{f}f)\psi)=$$
$$=\int|f(\lambda)|^2\,d\mu_\psi.$$

Следовательно, если $f=g$ п.в. по отношению к μ_ψ, то $\phi(f)\psi=$ $=\phi(g)\psi$. Итак, U корректно определено на $\{\phi(f)\psi\mid f\in C(\sigma(A))\}$

и сохраняет норму. Так как ψ цикличен, т.е. $\overline{\{\phi(f)\psi \mid f \in C(\sigma(A))\}} = \mathscr{H}$, то по теореме об ограниченном линейном отображении U расширяется до изометрического отображения $\mathscr{H}$ в $L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$. Поскольку $C(\sigma(A))$ плотно в L^2, то $\operatorname{Ran} U = L^2(\sigma(A), d\mu_\psi)$. Наконец, если $f \in C(\sigma(A))$, то

$$(UAU^{-1}f)(\lambda) = [UA\phi(f)](\lambda) = [U\phi(xf)](\lambda) = \lambda f(\lambda).$$

По непрерывности это равенство продолжается с $f \in C(\sigma(A))$ на $f \in L^2$. ∎

Чтобы расширить эту лемму на произвольные A, надо воспользоваться тем, что A имеет порождающее $\mathscr{H}$ семейство инвариантных подпространств, такое, что A цикличен на каждом подпространстве:

Лемма 2. Пусть A — самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует разложение в прямую сумму $\mathscr{H} = \bigoplus_{n=1}^{N} \mathscr{H}_n$, где $N = 1, 2, \ldots$ *или* ∞, такое, что

(a) A оставляет каждое $\mathscr{H}_n$ **инвариантным**, т. е. из $\psi \in \mathscr{H}_n$ следует $A\psi \in \mathscr{H}_n$;

(b) для любого n существует $\phi_n \in \mathscr{H}_n$, который цикличен для сужения $A \restriction \mathscr{H}_n$, т. е. $\mathscr{H}_n = \overline{\{f(A)\phi_n \mid f \in C(\sigma(A))\}}$.

Доказательство. Простое применение леммы Цорна (задача 15).

Теперь, сочетая леммы 1 и 2, докажем спектральную теорему в той форме, которая нам кажется самой прозрачной:

Теорема VII.3 (спектральная теорема в терминах оператора умножения). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют меры $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ ($N = 1, 2, \ldots$ или ∞) на $\sigma(A)$ и унитарный оператор

$$U\colon \mathscr{H} \to \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n),$$

такой, что

$$(UAU^{-1}\psi)_n(\lambda) = \lambda\psi_n(\lambda),$$

где мы записали элемент $\psi \in \bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$ как набор $\langle\psi_1(\lambda), \ldots, \psi_N(\lambda)\rangle$. Эта реализация оператора A называется **спектральным представлением.**

Доказательство. Воспользуемся леммой 2, чтобы найти разложение, а затем леммой 1 для каждой компоненты. ∎

Эта теорема показывает, что любой ограниченный самосопряженный оператор есть оператор умножения на подходящем пространстве с мерой. При изменении оператора изменяются лишь соответствующие меры, а именно имеет место такое

Следствие. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют пространство с *конечной* мерой $\langle M, \mu\rangle$, ограниченная функция F на M и унитарный оператор $U: \mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$, такие, что

$$(UAU^{-1}f)(m) = F(m) f(m).$$

Доказательство. Выберем циклические векторы ϕ_n так, чтобы $\|\phi_n\| = 2^{-n}$. Пусть $M = \bigcup_{n=1}^{N} \mathbb{R}$, т. е. объединение N экземпляров $\mathbb{R}$. Зададим μ условием, что ее сужение на n-й экземпляр $\mathbb{R}$ есть μ_n. Так как $\mu(M) = \sum_{n=1}^{N} \mu_n(\mathbb{R}) < \infty$, то μ конечна. ∎

Отметим также, что доказанная теорема есть в сущности строгая форма обычных в физике дираковых обозначений. Действительно, положив $\psi_n(x) = \psi(x; n)$, мы в «новом представлении, заданном оператором U» найдем

$$(\psi, \phi) = \sum_n \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)} \phi(\lambda; n),$$

$$(\psi, A\phi) = \sum_n \int d\mu_n \overline{\psi(\lambda; n)} \lambda\phi(\lambda; n).$$

Это и есть знакомые физикам формулы с той лишь разницей, что формальные суммы заменены интегралами по спектральным мерам. Здесь мы ввели такое

Определение. Меры $d\mu_n$ называются **спектральными мерами**; они совпадают с $d\mu_\psi$ при подходящих ψ.

Эти меры определены *не* однозначно, и позже мы обсудим это. Сначала, однако, рассмотрим несколько примеров.

Пример 1. Пусть A — самосопряженная $n \times n$-матрица. «Обычная» конечномерная спектральная теорема утверждает, что A имеет полную ортонормированную систему собственных векторов $\psi_1, \ldots, \psi_n$, где $A\psi_i = \lambda_i \psi_i$. Предположим сначала, что собственные значения различны. Рассмотрим сумму дираковых мер $\mu = \sum_{i=1}^{n} \delta(x - \lambda_i)$. Тогда $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$, так как $f \in L^2$ задается набором $f = \langle f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)\rangle$. Ясно, что функция λf соответствует набору $\langle \lambda_1 f(\lambda_1), \ldots, \lambda_n f(\lambda_n)\rangle$, так что A — умножение на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Если мы выберем $\tilde{\mu} = \sum_{i=1}^{n} a_i \delta(x - \lambda_i)$, где

$a_1, \ldots, a_n > 0$, то A снова может быть представлен как оператор умножения на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\mu})$. Таким образом, в этом случае мы въявь сталкиваемся с неединственностью меры. Легко также понять, когда требуется более чем одна мера (в смысле числа слагаемых в разложении теоремы VII.3): конечномерный самосопряженный оператор может быть представлен как оператор умножения на пространстве $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ с одной мерой тогда и только тогда, когда A не имеет повторяющихся собственных значений.

Пример 2. Пусть A компактен и самосопряжен. Теорема Гильберта—Шмидта гласит, что существует полная ортонормированная система собственных векторов $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, где $A\psi_n = \lambda_n \psi_n$. Если нет повторяющихся собственных значений, то $\sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\delta(x-\lambda_n)$ служит спектральной мерой.

Пример 3. Пусть $\mathscr{H} = l^2(-\infty, \infty)$, т. е. множество последовательностей $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющих неравенству $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$. Зададим L: $\mathscr{H} \to \mathscr{H}$ формулой $(La)_n = a_{n+1}$; иными словами, L — левый сдвиг. При этом $L^* = R$, где $(Ra)_n = a_{n-1}$. Рассмотрим самосопряженный оператор $A = R + L$. Можно ли представить A как оператор умножения? Отобразим $\mathscr{H}$ в $L^2[0, 1]$ оператором U: $\{a_n\} \to \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n x}$. Тогда ULU^{-1} — умножение на $e^{-2\pi i x}$, а URU^{-1} — умножение на $e^{2\pi i x}$, так что UAU^{-1} — оператор умножения на $2\cos(2\pi x)$. Построение преобразований, необходимых для представления A как умножения на x, на $L^2(\mathbb{R}, d\mu_1) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_2)$, мы отнесем к задачам. Меры μ_1 и μ_2 имеют носитель в $[-2, 2]$.

Пример 4. Рассмотрим $i^{-1}d/dx$ в $L^2(\mathbb{R}, dx)$. Это неограниченный оператор и, строго говоря, он не относится к этому разделу. Но в § VIII.3 мы докажем аналог теоремы VII.3. Итак, мы разыскиваем оператор U и меру $d\mu$ (оказывается, необходима лишь одна мера μ), U: $L^2(\mathbb{R}, dx) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu(k))$, такие, что

$$U\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}f\right)(k) = k(Uf)(k).$$

Преобразование Фурье $(Uf)(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int f(x) e^{-ikx} dx$, рассматриваемое в гл. IX, как раз и осуществляет такой переход. Следовательно, фурье-образ представляет собой пример спектрального представления.

Исследуем теперь связь между спектральными мерами и спектром.

Определение. **Носителем** семейства мер $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ называется дополнение наибольшего открытого множества B, такого, что $\mu_n(B)=0$ для всех n, т.е.

$$\operatorname{supp}\{\mu_n\}=\overline{\bigcup_{n=1}^{N}\operatorname{supp}\mu_n}.$$

Предложение. Пусть A — самосопряженный оператор и $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ — семейство спектральных мер. Тогда

$$\sigma(A)=\operatorname{supp}\{\mu_n\}_{n=1}^N.$$

Существует также простое описание $\sigma(A)$ при помощи более общих операторов умножения, обсуждавшихся после теоремы VII.3.

Определение. Пусть F — вещественнозначная функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Мы говорим, что λ принадлежит **существенной области** значений функции F, если для всех $\varepsilon>0$

$$\mu\{m\,|\,\lambda-\varepsilon<F(m)<\lambda+\varepsilon\}>0.$$

Предложение. Пусть F — ограниченная вещественнозначная функция на пространстве с мерой $\langle M, \mu\rangle$. Пусть T_F — оператор в $L^2(M, d\mu)$, заданный формулой

$$(T_Fg)(m)=F(m)\,g(m).$$

Тогда $\sigma(T_F)$ — существенная область значений F.

Доказательство. См. задачу 17b.

Теперь видно, какая именно информация содержится в спектре. **Унитарным инвариантом** самосопряженного оператора A является такое свойство P, что $P(A)=P(UAU^{-1})$ для всех унитарных U. Таким образом, унитарные инварианты суть «внутренние» свойства самосопряженных операторов, т.е. свойства, не зависящие от «представления». Примером такого унитарного инварианта и является спектр $\sigma(A)$. Однако спектр — бедный инвариант: например, умножение на x на $L^2([0, 1], dx)$ и оператор с полной системой собственных функций, имеющий в качестве собственных значений все рациональные числа отрезка $[0, 1]$, весьма различны, хотя спектры обоих равны $[0, 1]$.

В конце этого раздела мы увидим, что существует канонический выбор «спектральных мер», который дает полный набор унитарных инвариантов, т.е. набор свойств, различающих два любых самосопряженных оператора A и B, кроме тех, для которых $A=UBU^{-1}$ при некотором унитарном U. Это объясняет, почему $\sigma(A)$ — такой плохой инвариант: ведь меры различного типа могут иметь один и тот же носитель. Если мы хотим найти инварианты получше и при этом проще, чем меры, то разумно сначала разложить спектральные меры каким-нибудь естественным образом и только потом перейти к носителям. Вспомним теорему I.13, которая утверждает, что любая мера μ на $\mathbb{R}$ имеет единственное разложение в сумму $\mu=\mu_{pp}+\mu_{ac}+\mu_{sing}$, где мера μ_{pp} чисто точечная, μ_{ac} абсолютно непрерывна по отношению к мере Лебега, а μ_{sing} непрерывна и сингулярна по отношению к мере Лебега. Эти три компоненты взаимно сингулярны, так что

$$L^2(\mathbb{R}, d\mu)=L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp})\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sing}).$$

Легко видеть (задача 18), что произвольное $\psi\in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ приводит к абсолютно непрерывной спектральной мере $d\mu_\psi$ тогда и только тогда, когда $\psi\in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$, и то же справедливо для чисто точечной и сингулярной мер. Если $\{\mu_n\}_{n=1}^N$ — семейство спектральных мер, мы можем построить сумму $\bigoplus\limits_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_{n;\,ac})$, применяя такое

Определение. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на $\mathscr{H}$. Положим $\mathscr{H}_{pp}=\{\psi\,|\,\mu_\psi$ чисто точечна$\}$, $\mathscr{H}_{ac}=\{\psi\,|\,\mu_\psi$ абсолютно непрерывна$\}$, $\mathscr{H}_{sing}=\{\psi\,|\,\mu_\psi$ непрерывна и сингулярна$\}$.

Таким образом, нами доказана

Теорема VII.4. $\mathscr{H}=\mathscr{H}_{pp}\oplus\mathscr{H}_{ac}\oplus\mathscr{H}_{sing}$. Каждое из этих подпространств инвариантно относительно A. Сужение $A\restriction\mathscr{H}_{pp}$ имеет полную систему собственных векторов, $A\restriction\mathscr{H}_{ac}$ имеет только абсолютно непрерывные спектральные меры и $A\restriction\mathscr{H}_{sing}$ имеет только непрерывные сингулярные спектральные меры.

Определение. $\sigma_{pp}(A)=\{\lambda\,|\,\lambda$ — собственное значение $A\}$,

$$\sigma_{cont}(A)=\sigma(A\restriction\mathscr{H}_{cont}\equiv\mathscr{H}_{sing}\oplus\mathscr{H}_{ac}),$$
$$\sigma_{ac}(A)=\sigma(A\restriction\mathscr{H}_{ac}),$$
$$\sigma_{sing}(A)=\sigma(A\restriction\mathscr{H}_{sing}).$$

Эти множества называются соответственно: **чисто точечным, непрерывным, абсолютно непрерывным** и **сингулярным** (или **непрерывно сингулярным**) **спектром**.

Может оказаться, что $\sigma_{ac}\cup\sigma_{sing}\cup\sigma_{pp}\neq\sigma$, но это только потому, что мы определили σ_{pp} не как $\sigma(A\restriction\mathscr{H}_{pp})$, а как фактическое множество собственных значений.

Предложение. $\sigma_{cont}(A)=\sigma_{ac}(A)\cup\sigma_{sing}(A)$,

$$\sigma(A)=\overline{\sigma_{pp}(A)}\cup\sigma_{cont}(A).$$

Однако эти множества могут пересекаться. Необходимо предостеречь читателя, что $\sigma_{\text{sing}}(A)$ может иметь ненулевую лебегову меру (задача 7). В ряде случаев именно такое разбиение спектра позволяет получить полезные сведения. В § VII.3 мы введем другое разбиение, которое тоже очень полезно.

Как уже говорилось в замечаниях к § VI.3, некоторые авторы пользуются понятием «непрерывного спектра», отличным от приведенного выше. Именно, они определяют непрерывный спектр как множество таких $\lambda \in \sigma(T)$, которые не принадлежат ни точечному, ни остаточному спектрам. Чтобы показать разницу между этими двумя определениями, положим $\mathcal{H} = \mathbb{C} \oplus L^2[0, 1]$ и определим A: $\langle \alpha, f(x) \rangle \to \langle \alpha/2, xf(x) \rangle$. По нашему определению точка $\lambda = 1/2$ входит как в чисто точечный, так и в непрерывный спектры. Другие же авторы относят $\lambda = 1/2$ к точечному спектру, а непрерывный спектр по их определению есть $[0, 1/2) \cup \cup (1/2, 1]$.

Теперь мы обратимся к проблеме канонического выбора спектральных мер, т. е. к тому, что называется «теорией кратностей». Мы приведем без доказательств основные результаты.

1. Операторы с простым спектром

Прежде всего зададимся вопросом: когда оператор A унитарно эквивалентен умножению на x на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, т. е. когда можно обойтись лишь одной мерой? Пример 1 показывает, что в конечномерном случае это возможно лишь тогда, когда A не имеет повторяющихся собственных значений. Поэтому мы введем такое

Определение. Ограниченный самосопряженный оператор A называется **оператором с простым спектром**, если A унитарно эквивалентен оператору умножения на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ для некоторой меры μ.

Несколько интересных внутренних характеристик «простого спектра» дает следующая

Теорема VII.5. Следующие утверждения эквивалентны:

(a) A имеет простой спектр;
(b) A обладает циклическим вектором;
(c) $\{B \mid AB = BA\}$ есть абелева алгебра.

2. Классы мер

Теперь зададимся вопросом о единственности меры в случае простого спектра. Ситуация с простым спектром в конечномерном случае была продемонстрирована в примере 1: «приемлемыми» мерами были суммы $\sum_{n=1}^{N} \alpha_n \delta(\lambda - \lambda_n)$ с любыми $\alpha_n \neq 0$. Здесь возможно естественное обобщение. Предположим, что на $\mathbb{R}$ задана μ, и пусть F — измеримая функция, которая положительна, не равна нулю п. в. по отношению к мере μ и локально принадлежит $L^1(\mathbb{R}, d\mu)$, т. е. $\int_C |F| \, d\mu < \infty$ для любого компактного множества $C \subset \mathbb{R}$. Тогда $d\nu = F d\mu$ — борелева мера и отображение

$$U\colon\ L^2(\mathbb{R}, d\nu) \to L^2(\mathbb{R}, d\mu),$$

заданное формулой $(Uf)(\lambda) = \sqrt{F(\lambda)}\, f(\lambda)$, унитарно (это отображение «на», поскольку $F \neq 0$ п. в.) и $\lambda(Uf) = U(\lambda f)$. Таким образом, оператор A со спектральным представлением в терминах μ с тем же успехом может быть представлен мерой ν. По теореме Радона — Никодима равенство $d\nu = F d\mu$, где F п. в. не равна нулю, выполняется тогда и только тогда, когда ν и μ имеют совпадающие множества нулевой меры. Поэтому разумно ввести следующее

Определение. Две борелевы меры μ и ν называются **эквивалентными**, если они имеют одни и те же множества нулевой меры. Класс эквивалентности $\langle\mu\rangle$ называется **классом мер**[1]).

Тогда решение проблемы неединственности дает следующее

Предложение. Пусть μ и ν — борелевы меры на $\mathbb{R}$ с ограниченными носителями. Пусть A_μ — оператор на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, определенный формулой $(A_\mu f)(\lambda) = \lambda f(\lambda)$, и A_ν — аналогичный оператор на $L^2(\mathbb{R}, d\nu)$. Операторы A_μ и A_ν унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда μ и ν — эквивалентные меры.

3. Операторы однородной кратности

Если необходимо каким-либо стандартным способом перечислить все собственные значения некоторой матрицы, то естественно выписать все собственные значения кратности один, все собственные значения кратности два и т. д. Поэтому удобно различать операторы однородной кратности два, три и т. д. Введем такое

Определение. Ограниченный самосопряженный оператор A называется оператором **однородной кратности** m, если A унитарно эквивалентен умножению на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu)$, где сумма содержит m членов, а μ — некоторая борелева мера.

Разумность этого определения демонстрирует следующее

---

[1]) Иногда такой класс мер называют спектральным типом, а вводимые ниже дизъюнктные классы — независимыми спектральными типами. — *Прим. перев.*

Предложение. Если A унитарно эквивалентен умножению на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ (m раз) и на $L^2(\mathbb{R}, d\nu) \oplus \ldots \oplus L^2(\mathbb{R}, d\nu)$ (n раз), то $m = n$, а μ и ν — эквивалентные меры.

4. Дизъюнктные классы мер

При перечислении собственных значений кратности один, два, три и т. д. в конечномерном случае необходимо наложить условие, которое не позволит нам рассматривать собственное значение кратности три как собственное значение кратности один и собственное значение кратности два. В конечномерном случае мы избегаем этой «ошибки», требуя, чтобы разные «списки» собственных значений не пересекались. По аналогии для мер вводим такое

Определение. Два класса мер $\langle\mu\rangle$ и $\langle\nu\rangle$ называются **дизъюнктными**, если любые $\mu_1 \in \langle\mu\rangle$ и $\nu_1 \in \langle\nu\rangle$ взаимно сингулярны.

5. Теорема о кратности

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема VII.6 (коммутативная теорема о кратности). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \ldots \oplus \mathcal{H}_\infty$, такое, что

(a) A оставляет каждое $\mathcal{H}_m$ инвариантным;

(b) $A \upharpoonright \mathcal{H}_m$ — оператор однородной кратности m;

(c) классы мер $\langle\mu_m\rangle$, ассоциированных со спектральным разложением $A \upharpoonright \mathcal{H}_m$, взаимно дизъюнктны.

Более того, подпространства $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_m, \ldots, \mathcal{H}_\infty$ (некоторые из них могут быть нулевыми) и *классы мер* $\langle\mu_1\rangle, \ldots, \langle\mu_m\rangle, \ldots, \langle\mu_\infty\rangle$ определены условиями (a) — (c) однозначно.

Спектральная теорема, дополненная теорией кратностей, — одна из жемчужин математики: это структурная теорема, т. е. теорема, которая описывает все объекты определенного вида с точностью до естественной эквивалентности. Каждый ограниченный самосопряженный оператор A описывается семейством взаимно дизъюнктных классов мер на $[-\|A\|, \|A\|]$; два оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их спектральные классы мер *совпадают.*

VII. 3. Спектральные проекторы

В предыдущем разделе мы построили функциональное исчисление $f \mapsto f(A)$ для любой борелевой функции f и любого ограниченного самосопряженного оператора A. Важнейшие функции,