Предложение. Если A унитарно эквивалентен умножению на λ на $L^2(\mathbb{R}, d\mu)\oplus\ldots\oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu)$ (m раз) и на $L^2(\mathbb{R}, d\nu)\oplus\ldots$ $\ldots\oplus L^2(\mathbb{R},d\nu)$ (n раз), то $m=n$, а μ и ν — эквивалентные меры.

4. Дизъюнктные классы мер

При перечислении собственных значений кратности один, два, три и т. д. в конечномерном случае необходимо наложить условие, которое не позволит нам рассматривать собственное значение кратности три как собственное значение кратности один и собственное значение кратности два. В конечномерном случае мы избегаем этой «ошибки», требуя, чтобы разные «списки» собственных значений не пересекались. По аналогии для мер вводим такое

Определение. Два класса мер $\langle\mu\rangle$ и $\langle\nu\rangle$ называются **дизъюнктными**, если любые $\mu_1\in\langle\mu\rangle$ и $\nu_1\in\langle\nu\rangle$ взаимно сингулярны.

5. Теорема о кратности

Теперь мы можем сформулировать основную теорему.

Теорема VII.6 (коммутативная теорема о кратности). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существует разложение $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1\oplus\mathscr{H}_2\oplus\ldots$ $\ldots\oplus\mathscr{H}_\infty$, такое, что

(a) A оставляет каждое $\mathscr{H}_m$ инвариантным;

(b) $A\restriction\mathscr{H}_m$ — оператор однородной кратности m;

(c) классы мер $\langle\mu_m\rangle$, ассоциированных со спектральным разложением $A\restriction\mathscr{H}_m$, взаимно дизъюнктны.

Более того, подпространства $\mathscr{H}_1$, $\ldots$, $\mathscr{H}_m$, $\ldots$, $\mathscr{H}_\infty$ (некоторые из них могут быть нулевыми) и *классы мер* $\langle\mu_1\rangle$, $\ldots$ $\ldots$, $\langle\mu_m\rangle$, $\ldots$, $\langle\mu_\infty\rangle$ определены условиями (a) — (c) однозначно.

Спектральная теорема, дополненная теорией кратностей, — одна из жемчужин математики: это структурная теорема, т. е. теорема, которая описывает все объекты определенного вида с точностью до естественной эквивалентности. Каждый ограниченный самосопряженный оператор A описывается семейством взаимно дизъюнктных классов мер на $[-\|A\|, \|A\|]$; два оператора унитарно эквивалентны тогда и только тогда, когда их спектральные классы мер *совпадают.*

VII. 3. Спектральные проекторы

В предыдущем разделе мы построили функциональное исчисление $f\mapsto f(A)$ для любой борелевой функции f и любого ограниченного самосопряженного оператора A. Важнейшие функции, приобретенные при переходе от непрерывных функций к борелевым, — это характеристические функции множеств.

Определение. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, а Ω — борелево множество в $\mathbb{R}$. Оператор $P_\Omega \equiv \chi_\Omega(A)$ называется **спектральным проектором** оператора A.

Как следует из определения, P_Ω — ортогональный проектор, ибо поточечно $\chi_\Omega^2 = \chi_\Omega = \overline{\chi}_\Omega$. Свойства семейства проекторов $\{P_\Omega \mid \Omega$ — произвольное борелево множество$\}$ задаются при помощи следующего элементарного перевода с языка функционального исчисления (задача 22).

Предложение. Семейство P_Ω спектральных проекторов ограниченного самосопряженного оператора A обладает следующими свойствами:

(a) каждый P_Ω — ортогональный проектор;

(b) $P_\varnothing = 0$, $P_{(-a,\, a)} = I$ для некоторого a;

(c) если $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, причем $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ для всех $n \neq m$, то

$$P_\Omega = \operatorname*{s-lim}_{N\to\infty}\left(\sum_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}\right);$$

(d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Условие (c) очень напоминает условие, определяющее меру. И действительно, так и вводится

Определение. Семейство проекторов, удовлетворяющих условиям (a) — (c), называется (ограниченной) **проекторнозначной мерой.**

Отметим, что абстрактные рассуждения (задача 22) позволяют вывести (d) из (a) и (c).

Как и следовало ожидать, по проекторнозначной мере можно интегрировать. Если P_Ω — проекторнозначная мера, то $(\phi, P_\Omega \phi)$ — обычная мера при любом ϕ. Для обозначения интегрирования по этой мере мы будем пользоваться символом $d(\phi, P_\lambda \phi)$. Стандартный метод с применением леммы Рисса показывает, что существует единственный оператор B, такой, что $(\phi, B\phi) = \int f(\lambda)\, d(\phi, P_\lambda \phi)$. Итак, справедлива

Теорема VII.7. Если P_Ω — проекторнозначная мера и f — ограниченная борелева функция на $\operatorname{supp} P_\Omega$, то существует единственный оператор B, который мы обозначаем $\int f(\lambda)\, dP_\lambda$, такой, что

$$(\phi, B\phi) = \int f(\lambda)\, d(\phi, P_\lambda \phi) \qquad \forall \phi \in \mathscr{H}.$$

Пример. Если A — ограниченный самосопряженный оператор и $\{P_\Omega\}$ — соответствующая ему проекторнозначная мера, то легко видеть (задача 23), что $f(A) = \int f(\lambda)\,dP_\lambda$. В частности, $A = \int \lambda\,dP_\lambda$.

Предположим теперь, что задана ограниченная проекторнозначная мера P_Ω, и построим $A = \int \lambda\,dP_\lambda$. Не удивительно (задача 23), что P_Ω — это как раз проекторнозначная мера, ассоциированная с A. Итог нашим построениям подводит

Теорема VII.8 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер). **Существует взаимно однозначное соответствие между (ограниченными) самосопряженными операторами A и (ограниченными) проекторнозначными мерами $\{P_\Omega\}$, задаваемое формулами:**

$$A \mapsto \{P_\Omega\} = \{\chi_\Omega(A)\},$$
$$\{P_\Omega\} \mapsto A = \int \lambda\,dP_\lambda.$$

Как раз при помощи этой теоремы и ее обобщения на неограниченные операторы вводятся самосопряженные операторы в квантовую механику, поскольку наблюдаемые естественно представлять себе как проекторнозначные меры (обобщение приведено в § VIII.3, а квантовомеханические пояснения — в замечаниях к § VIII.11).

Спектральными проекторами можно воспользоваться для изучения спектра оператора A.

Предложение. **$\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0$ при любом $\varepsilon > 0$.**

Важная часть доказательства (детали которого мы опускаем; см. задачу 24) — равенство $\|(A-\lambda)^{-1}\| = [\operatorname{dist}(\lambda, \sigma(A))]^{-1}$.

Это предложение позволяет различать два следующих типа спектров:

Определение. Мы говорим, что $\lambda \in \sigma_{\text{ess}}(A)$ — **существенному спектру** оператора A, тогда и только тогда, когда проектор $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A)$ бесконечномерен для всех $\varepsilon > 0$. Если $\lambda \in \sigma(A)$, но $P_{(\lambda-\varepsilon,\,\lambda+\varepsilon)}(A)$ конечномерен для некоторого $\varepsilon > 0$, мы говорим, что $\lambda \in \sigma_{\text{disc}}(A)$ — **дискретному спектру** оператора A. Проектор P называется бесконечномерным, если бесконечномерно $\operatorname{Ran} P$.

Итак, мы имеем еще одно разбиение спектра $\sigma(A)$. В отличие от первого это разбиение на два непересекающихся подмножества. Отметим, что σ_{disc} не обязательно замкнуто, однако справедлива

Теорема VII.9. Спектр $\sigma_{ess}(A)$ всегда замкнут.

Доказательство. Пусть $\lambda_n \to \lambda$, причем каждое $\lambda_n \in \sigma_{ess}(A)$. Поскольку любой открытый интервал I вокруг λ содержит интервал вокруг некоторого λ_n, проектор $P_I(A)$ бесконечномерен. ∎

Следующие три теоремы дают другие описания σ_{disc} и σ_{ess}. Их доказательства мы оставляем читателю (задача 26).

Теорема VII.10. $\lambda \in \sigma_{disc}$ тогда и только тогда, когда *одновременно* выполнены следующие условия:

(a) λ — изолированная точка $\sigma(A)$, т. е. для некоторого ε имеем $(\lambda-\varepsilon, \lambda+\varepsilon) \cap \sigma(A) = \{\lambda\}$;

(b) λ — собственное значение конечной кратности, т. е. множество $\{\psi \mid A\psi = \lambda\psi\}$ имеет конечную размерность.

Теорема VII.11. $\lambda \in \sigma_{ess}$ тогда и только тогда, когда выполнено по крайней мере *одно* из следующих условий:

(a) $\lambda \in \sigma_{cont}(A) \equiv \sigma_{ac}(A) \cup \sigma_{sing}(A)$;

(b) λ — предельная точка $\sigma_{pp}(A)$;

(c) λ — собственное значение бесконечной кратности.

Теорема VII.12 (критерий Вейля). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Тогда $\lambda \in \sigma(A)$ в том и только том случае, когда существует последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, такая, что $\|\psi_n\| = 1$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|(A-\lambda)\psi_n\| = 0$. При этом $\lambda \in \sigma_{ess}(A)$ тогда и только тогда, когда последовательность $\{\psi_n\}$ может быть выбрана ортогональной.

Как и следовало ожидать, существенный спектр невозможно изменить конечномерными возмущениями. В § XIII.3 мы докажем общую теорему, из которой следует, что $\sigma_{ess}(A) = \sigma_{ess}(B)$, если $A - B$ — компактный оператор.

В заключение мы обсудим одну полезную формулу, связывающую резольвенту и спектральные проекторы. Положим

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \left(\frac{1}{x-\lambda-i\varepsilon} - \frac{1}{x-\lambda+i\varepsilon} \right) d\lambda.$$

Непосредственные вычисления показывают, что

$$f_\varepsilon(x) \to \begin{cases} 0, & x \notin [a, b], \\ 1/2, & x = a \text{ или } x = b, \\ 1, & x \in (a, b), \end{cases}$$

при $\varepsilon \downarrow 0$. Более того, $|f_\varepsilon(x)|$ равномерно ограничен по ε, так что из функционального исчисления получается

Теорема VII.13 (формула Стоуна). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор; тогда

$$\operatorname{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} \frac{1}{2\pi i}\int_a^b \left(\frac{1}{A-\lambda-i\varepsilon}-\frac{1}{A-\lambda+i\varepsilon}\right)d\lambda=\frac{1}{2}\left[P_{[a,\,b]}+P_{(a,b)}\right].$$

VII.4. Снова об эргодической теории. Купманизм

В § II.5 мы ввели понятие эргодичности для сохраняющего меру биективного отображения $T\colon \Omega\to\Omega$, где Ω — пространство с конечной мерой μ и $\mu(T^{-1}(M))=\mu(M)$ для любого измеримого множества $M\subset\Omega$. Как следовало из леммы Купмана, оператор U, заданный формулой $(Uf)(w)=f(Tw)$, унитарен на $L^2(\Omega, d\mu)$. Мы называли отображение T эргодичным тогда и только тогда, когда 1 — его простое собственное значение (т. е. собственное значение кратности один). В этом разделе мы хотим подробнее рассмотреть идею Купмана о том, что важные свойства T можно описать на языке спектральных свойств оператора U.

Чтобы лучше ощутить нужное для этого понятие перемешивания, которое мы вскоре введем, рассмотрим сначала пример.

Пример 1. Пусть Ω — поверхность тора, которую можно представлять себе как множество пар чисел $\langle x, y\rangle$, где $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$, наделенное такой топологией, что окрестности нуля содержат точки вблизи 1. Две пары $\langle x, y\rangle$ и $\langle z, w\rangle$ вещественных чисел рассматриваются как эквивалентные, если $x-z$ и $y-w$ — целые. Тогда Ω является множеством всех классов эквивалентности пар. Определим двупараметрическое семейство отображений $T_{a,b}\colon\Omega\to\Omega$ формулой $T_{a,b}\langle x, y\rangle=\langle x+a, y+b\rangle$. Отображение $T_{a,b}$ сохраняет лебегову меру. Когда оно эргодично по отношению к этой мере? Если пользоваться определением эргодичности, которое требует, чтобы не существовало инвариантных множеств с мерой, отличной от 1 или 0, то не ясно, какие $T_{a,b}$ эргодичны. Однако, если обратиться к оператору $U_{a,b}$: $(U_{a,b}f)(x, y)=f(x+a, y+b)$, то видно, что он имеет полную систему собственных векторов $\varphi_{n,m}(x, y)=\exp[2\pi i(nx+my)]$. В самом деле, $U_{a,b}\varphi_{n,m}=\exp[2\pi i(na+mb)]\varphi_{n,m}$. Когда 1 — простое собственное значение? Очевидно, тогда и только тогда, когда $na+mb=k$ не имеет целых решений n, m и k, за исключением $n=m=0$ (например, при $a=\pi$, $b=\sqrt{2}$).

Итак, $T_{\pi,\sqrt{2}}$ эргодично, и в этом случае средние по пространству равны средним по времени. Но произошло это скорее потому, что образы $\{T^n w\mid w\in\Omega\}$ образуют в Ω плотное и доста-