Теорема VII.13 (формула Стоуна). Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор; тогда

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0}\frac{1}{2\pi i}\int_a^b\left(\frac{1}{A-\lambda-i\varepsilon}-\frac{1}{A-\lambda+i\varepsilon}\right)d\lambda=\frac{1}{2}\left[P_{[a,\,b]}+P_{(a,b)}\right].$$

VII.4. Снова об эргодической теории. Купманизм

В § II.5 мы ввели понятие эргодичности для сохраняющего меру биективного отображения $T\colon \Omega\to\Omega$, где Ω — пространство с конечной мерой μ и $\mu(T^{-1}(M))=\mu(M)$ для любого измеримого множества $M\subset\Omega$. Как следовало из леммы Купмана, оператор U, заданный формулой $(Uf)(w)=f(Tw)$, унитарен на $L^2(\Omega,\,d\mu)$. Мы называли отображение T эргодичным тогда и только тогда, когда 1 — его простое собственное значение (т. е. собственное значение кратности один). В этом разделе мы хотим подробнее рассмотреть идею Купмана о том, что важные свойства T можно описать на языке спектральных свойств оператора U.

Чтобы лучше ощутить нужное для этого понятие перемешивания, которое мы вскоре введем, рассмотрим сначала пример.

Пример 1. Пусть Ω — поверхность тора, которую можно представлять себе как множество пар чисел $\langle x,\,y\rangle$, где $0\leqslant x<1$, $0\leqslant y<1$, наделенное такой топологией, что окрестности нуля содержат точки вблизи 1. Две пары $\langle x,\,y\rangle$ и $\langle z,\,w\rangle$ вещественных чисел рассматриваются как эквивалентные, если $x-z$ и $y-w$ — целые. Тогда Ω является множеством всех классов эквивалентности пар. Определим двупараметрическое семейство отображений $T_{a,\,b}\colon\Omega\to\Omega$ формулой $T_{a,\,b}\langle x,\,y\rangle=\langle x+a,\,y+b\rangle$. Отображение $T_{a,\,b}$ сохраняет лебегову меру. Когда оно эргодично по отношению к этой мере? Если пользоваться определением эргодичности, которое требует, чтобы не существовало инвариантных множеств с мерой, отличной от 1 или 0, то не ясно, какие $T_{a,\,b}$ эргодичны. Однако, если обратиться к оператору $U_{a,\,b}$: $(U_{a,\,b}f)(x,\,y)=f(x+a,\,y+b)$, то видно, что он имеет полную систему собственных векторов $\varphi_{n,\,m}(x,\,y)=\exp[2\pi i(nx+my)]$. В самом деле, $U_{a,\,b}\varphi_{n,\,m}=\exp[2\pi i(na+mb)]\varphi_{n,\,m}$. Когда 1 — простое собственное значение? Очевидно, тогда и только тогда, когда $na+mb=k$ не имеет целых решений n, m и k, за исключением $n=m=0$ (например, при $a=\pi$, $b=\sqrt{2}$).

Итак, $T_{\pi,\sqrt{2}}$ эргодично, и в этом случае средние по пространству равны средним по времени. Но произошло это скорее потому, что образы $\{T^n w\mid w\in\Omega\}$ образуют в Ω плотное и достаточно равномерное множество, чем потому, что T^n «размазывает» некоторую малую окрестность точки w на все Ω, как на рис. VII.1. Действительно, ведь T^n здесь — «преобразование, сохраняющее форму», а «необратимость» должна была бы приводить к тому, что соседние точки w и u перестают быть таковыми после многократных итераций T.

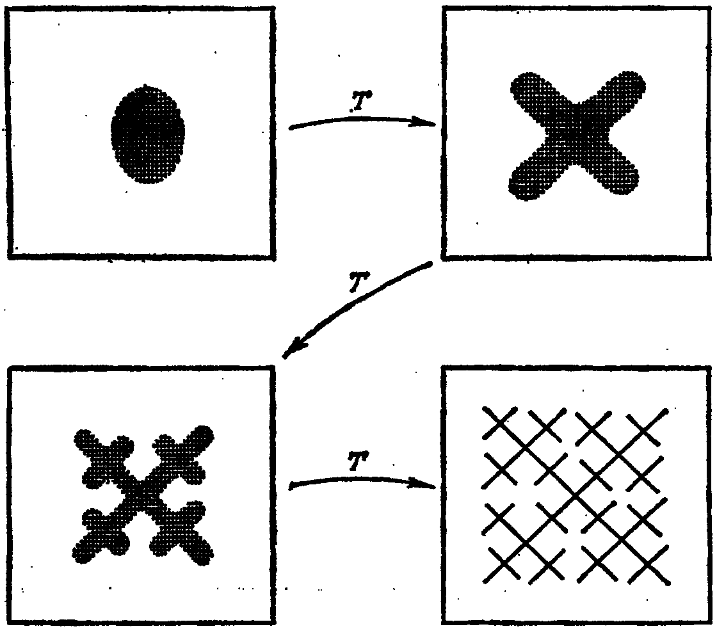

Рис. VII.1. Иллюстрация интуитивной идеи о термодинамическом поведении в фазовом пространстве.

Как описать тот факт, что какое-то множество M «равномерно» размазывается итерациями? Следует, видимо, считать, что точка «забывает», в какой момент она начала движение из A, т. е. что вероятность нахождения одновременно в T^nA и в некотором другом множестве B стремится к не зависящему от n пределу.

Определение. Сохраняющее меру преобразование $T\colon \Omega \to \Omega$ на пространстве с мерой $\langle\Omega, \mu\rangle$, где $\mu(\Omega)=1$, называется **перемешивающим**, если для всех измеримых множеств A и B из Ω:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(T^nA \cap B) = \mu(A)\,\mu(B).$$

Если T эргодично, то по статистической эргодической теореме

$$\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}\mu(T^m A\cap B)=\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}(U^{-m}\chi_A,\ \chi_B)=(\chi_A,\ 1)(1,\ \chi_B)=$$
$$=\mu(A)\mu(B).$$

Таким образом, эргодичность эквивалентна существованию перемешивающего предела в смысле Чезаро, так что перемешивание влечет за собой эргодичность. Можно убедиться в этом и непосредственно. Если $T[A]=A$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(T^nA\cap A)=\mu(A)$, так что в случае перемешивания $\mu(A)^2=\mu(A)$, т. е. $\mu(A)=0$ или 1. Прежде чем сформулировать утверждение о том, что перемешивание имеет своим следствием эргодичность, введем одно промежуточное понятие.

Определение. Сохраняющее меру преобразование $T:\Omega\to\Omega$ на пространстве с мерой $\langle\Omega,\ \mu\rangle$, где $\mu(\Omega)=1$, называется **слабо перемешивающим**, если для любых измеримых множеств A и B из Ω:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=0}^{n-1}|\mu(T^mA\cap B)-\mu(A)\mu(B)|=0.$$

Теперь очевидно следующее

Предложение. Перемешивание $\Rightarrow$ слабое перемешивание $\Rightarrow$ эргодичность.

Рассмотрим сначала преобразование, которое, как мы вскоре покажем, является примером перемешивания. Мы увидим также, что преобразование примера 1 *не* перемешивающее.

Пример 2 (преобразование пекаря). Пусть Ω — поверхность тора. Положим

$$T\langle x,\ y\rangle=\begin{cases}\langle 2x,\ y/2\rangle, & \text{если } 0\leqslant x<1/2,\\ \langle 2x-1,\ 1/2+y/2\rangle, & \text{если } 1/2\leqslant x<1\end{cases}$$

(рис. VII.2). Ясно видно, как T «разрывает» и «разбрасывает по Ω» части исходного множества.

Слабое перемешивание и перемешивание имеют простое описание при помощи ассоциированного унитарного оператора U.

Теорема VII.14. Пусть T — измеримое преобразование и U — ассоциированный унитарный оператор. Тогда

(а) T — перемешивающее тогда и только тогда, когда

$$\operatorname*{w-lim}_{n\to\infty}U^n=P_1,$$

где P_1 — проектор на константы, т. е. тогда и только тогда, когда

$$\lim_{n\to\infty}(f,\ U^n g) = (f,\ 1)(1,\ g);$$

(b) T — слабо перемешивающее тогда и только тогда, когда U не имеет собственных значений, отличных от единицы, причем единица — простое собственное значение.

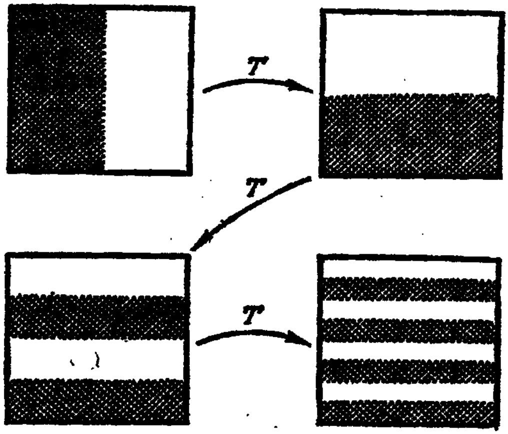

Рис. VII.2. Преобразование пекаря.

Доказательство. (a) То, что T — перемешивающее, очевидно, следует из условия $(f,\ U^n g) \to (f,\ 1)(1,\ g)$, ибо можно взять $f = \chi_A$ и $g = \chi_B$. Обратно, когда T — перемешивающее, предельное равенство справедливо, если f и g — характеристические функции, а значит, и конечные линейные комбинации характеристических функций. Поскольку последние плотны, $\|U^n\| = 1$ и $\|P_1\| = 1$, отсюда следует результат.

(b) См. литературу, указанную в Замечаниях. ∎

Преобразование в примере 1 *не* перемешивающее, так как $U\psi = \lambda\psi$ влечет за собой $\text{w-}\lim U^n\psi \neq P_1\psi$ при $\lambda \neq 1$.

Существует спектральное условие на U, которое часто бывает полезно при доказательстве свойств перемешивания. Заметим, что спектральную теорему можно доказать для нормальных (а следовательно, и для унитарных) операторов (задачи 3 и 5), поэтому имеет смысл понятие абсолютно непрерывного спектра.

Теорема VII.15. Пусть T — сохраняющее меру преобразование и U — ассоциированный унитарный оператор. Тогда

(a) если U имеет только абсолютно непрерывный спектр на $\{1\}^{\perp}$, т. е. если $\mathscr{H}_{\mathrm{ac}}=\left\{f \,\middle|\, (f,\ 1)=\int f\,d\mu=0\right\}$, то T—перемешивающее;

(b) если $\{1\}^{\perp}$ имеет ортонормированный базис $\{\varphi_{n,m}\}$, $-\infty<n<\infty$, $1\leqslant m<N+1$, где N конечно или бесконечно, такой, что $U\varphi_{n,m}=\varphi_{n+1,m}$, то U имеет на $\{1\}^{\perp}$ лишь абсолютно непрерывный спектр и T—перемешивающее.

Доказательство. (a) Легко видеть, что $U^n \xrightarrow{w} P_1$ тогда и только тогда, когда $(f,\ U^n g)\to 0$ для всех $f,\ g\in\{1\}^{\perp}$. Предположим, что U имеет только абсолютно непрерывный спектр. Тогда мы можем найти функции $\{F_m\}_{m=1}^{N}$ и реализацию вектора $f\in\{1\}^{\perp}$ в виде $f=\langle f_1(\theta),\ \ldots,\ f_m(\theta),\ \ldots\rangle$, такне, что

$$(f,\ U^n g)=\sum_{m=1}^{N}\int_0^{2\pi} e^{in\theta}\overline{f_m(\theta)}\,g_m(\theta)\,F_m(\theta)\,d\theta=$$
$$=\int_0^{2\pi} e^{in\theta}Q(\theta)\,d\theta,$$

где $\int_0^{2\pi}|Q(\theta)|\,d\theta<\infty$. По лемме Римана—Лебега, которую мы докажем в § IX.2, $(f,\ U^n g)\to 0$.

(b) На $\{1\}^{\perp}$ оператор U—это просто N экземпляров правого сдвига на пространстве $l_2(-\infty,\ \infty)$. Мы уже рассмотрели оператор сдвига в примере 4 § VII.2 и показали, что он имеет абсолютно непрерывный спектр. ∎

Пример 2 (*продолжение*). Интуитивно вполне разумно допустить, что преобразование пекаря перемешивающее, но теперь мы располагаем средствами для доказательства, что это действительно так. Дадим новое определение оператора T. Запишем $\langle x,\ y\rangle\in\Omega$ в двоичной системе $x=0{,}x_1x_2\ \ldots$, $y=0{,}y_1y_2\ \ldots$, причем каждое $x_i=0$ или 1 и каждое $y_i=0$ или 1. Тогда

$$T\colon\ (0{,}x_1x_2\ \ldots,\quad 0{,}y_1y_2\ \ldots)\to(0{,}x_2x_3\ \ldots,\quad 0{,}x_1y_1y_2\ \ldots),$$

т. е. если мы представим точку в Ω как $(\ldots,\ y_3,\ y_2,\ y_1,\ x_1,\ x_2,\ldots)$, то T есть не что иное, как левый сдвиг. Предостережение: это совсем не то же самое, что сказать, что U—левый сдвиг! Это подсказывает наши дальнейшие действия. Определим функции $\chi_n(x,\ y)$ на Ω следующим образом: если $n>0$ и $x_n=0$, то $\chi_n(x,\ y)=1$, а если $x_n=1$, то $\chi_n(x,\ y)=-1$; если $n\leqslant 0$ и $y_{-n+1}=0$, то $\chi_n(x,\ y)=1$, а если $y_{-n+1}=1$, то $\chi_n(x,\ y)=-1$. Если $\{n_1,\ \ldots,\ n_m\}$—конечный набор целых чисел, положим

$$\chi_{\{n_1,\ \ldots,\ n_m\}}(x,\ y)=\prod_{k=1}^{m}\chi_{n_k}(x,\ y).$$

Положим $\chi_{\varnothing}=1$. Тогда

(a) $\chi_A\chi_B=\chi_{A\triangle B}$, где $A\triangle B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$;

(b) $\int \chi_A\,dx\,dy=\begin{cases}0, & \text{если } A\neq\varnothing,\\ 1, & \text{если } A=\varnothing;\end{cases}$

(c) в силу (a) и (b), χ_A образуют ортонормированную систему;

(d) если m, n, k и j — целые, такие, что $0<m\leqslant 2^n$, $0<k\leqslant 2^j$, то характеристическая функция множества

$$\left(\frac{m-1}{2^j},\ \frac{m}{2^j}\right]\times\left(\frac{k-1}{2^j},\ \frac{k}{2^j}\right]$$

может быть представлена как конечное произведение $\prod\limits_{m=1}^{N}(1\pm\chi_{n_m})$ с некоторыми целыми $n_1, \ldots, n_m$;

(e) χ_A образуют ортонормированный базис в $L^2(\Omega, dx\otimes dy)$, поскольку линейные комбинации введенных в (d) характеристических функций плотны;

(f) $U\chi_{\{n_1,\ \ldots,\ n_m\}}=\chi_{\{n_1+1,\ \ldots,\ n_m+1\}}$. Таким образом, $\{1\}^{\perp}$ обладает ортонормированным базисом $\psi_{n,m}$, причем $U\psi_{n,m}=\psi_{n+1,m}$. Параметр m пробегает счетное множество.

Итак, отображение примера 2 перемешивающее.

Эргодичность, перемешивание и спектральные понятия важны не только в статистической механике, но и при исследовании других задач. Пусть, например, $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с мерой, и пусть $T: M\to M$ и $S: N\to N$ — измеримые, обратимые и сохраняющие меру преобразования. Когда они эквивалентны? Иными словами, когда существует такое отображение $R: M\to N$, что $T=R^{-1}SR$? При этом требуется, чтобы R было биективным почти всюду (т. е. $\mu\{x\mid Ry=Rx$ для некоторых $y\neq x\}=0$ и $\mu\{N\setminus \operatorname{Ran} R\}=0$) и сохраняющим меру. Эта задача аналогична проблеме унитарной эквивалентности для самосопряженных операторов, которая решена теоремами о кратности, однако решена *не* полностью. В задаче 29 мы построим различные отображения, эквивалентные преобразованию пекаря.

Проблема унитарной эквивалентности для самосопряженных операторов была решена путем нахождения *полного* множества инвариантов. Купманизм немедленно дает целое семейство инвариантов для сохраняющих меру отображений, поскольку если $T: M\to M$ и $S: N\to N$ эквивалентны, то индуцированные унитарные операторы унитарно эквивалентны. Для заданного сохраняющего меру преобразования T классы мер одной кратности ассоциированного унитарного оператора являются инвариантами, т. е. если S и T связаны посредством $T=R^{-1}SR$, то их классы совпадают. Поскольку эргодичность и перемешивание могут быть выражены в терминах индуцированных купмановских унитарных операторов, они не являются дополнительными инвариантами. Образуют ли эти инварианты, ассоциированные с индуцированными унитарными операторами, полную систему? Иными словами, если индуцированные унитарные операторы унитарно эквивалентны, то следует ли отсюда, что существует такое R, что $T=R^{-1}SR$? При некоторых дополнительных предположениях ответ утвердителен.

Теорема VII.16 (Халмош, фон Нейман). Пусть $T: M \to M$ и $S: N \to N$ — сохраняющие меру эргодические преобразования, U_S и V_T — индуцированные унитарные операторы. Предположим, что U_S и V_T имеют только чисто точечный спектр. Тогда T и S эквивалентны в смысле теории меры в том и только в том случае, когда U_S и V_T унитарно эквивалентны.

С другой стороны, Колмогоров и Синай построили инвариант (называемый энтропией) для некоторого класса перемешивающих измеримых преобразований — так называемых К-систем. На $\{1\}^{\perp}$ существует ортонормированный базис $\{\psi_{n,m}\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$, такой, что для унитарного оператора U, индуцированного К-системой, $U\psi_{n,m}=\psi_{n+1,m}$. Таким образом, все унитарные операторы, индуцированные К-системами, унитарно эквивалентны. Тем не менее существуют К-системы с различной энтропией, так что инварианты индуцированных унитарных операторов не полностью характеризуют все преобразования, сохраняющие меру.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *VII.1.* Доказательство и обсуждение конечномерной спектральной теоремы см. в книге: П. Р. Халмош, Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

Подобное, но несколько отличающееся доказательство теоремы VII.1 приведено в книге: E. Nelson, Topics in Dynamics, v.I, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1969.

Общее функциональное исчисление $A \mapsto f(A)$ для функций f, аналитических в окрестности $\sigma(A)$, о котором мы упоминали, часто называют *функциональным исчислением Данфорда* после появления статьи: N. Dunford, Spectral Theory I, Convergence to Projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217. Основная идея состоит в том, чтобы выбрать контур C в области определения f так, чтобы $\sigma(A)$ содержался внутри C. Затем полагают $f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-A)^{-1}dz$. Тогда, например, из тождества Гильберта $(z-A)^{-1}(w-A)^{-1}=(w-z)^{-1}\cdot[(z-A)^{-1}-(w-A)^{-1}]$ вытекает свойство $(fg)(A)=f(A)g(A)$. Дальнейшее обсуждение см. в книге: Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, ИЛ, М., 1962, стр. 605—624 (см. также задачу 1).

§ *VII.2.* Обзор истории спектральной теоремы см. в статье: E. Hellinger, O. Toeplitz, *Encyklop. Math. Wiss.* II C, 13 (1928), 1335—1616.