ских унитарных операторов, они не являются дополнительными инвариантами. Образуют ли эти инварианты, ассоциированные с индуцированными унитарными операторами, полную систему? Иными словами, если индуцированные унитарные операторы унитарно эквивалентны, то следует ли отсюда, что существует такое R, что $T=R^{-1}SR$? При некоторых дополнительных предположениях ответ утвердителен.

Теорема VII.16 (Халмош, фон Нейман). Пусть $T: M \longrightarrow M$ и $S: N \longrightarrow N$ — сохраняющие меру эргодические преобразования, U_S и V_T — индуцированные унитарные операторы. Предположим, что U_S и V_T имеют только чисто точечный спектр. Тогда T и S эквивалентны в смысле теории меры в том и только в том случае, когда U_S и V_T унитарно эквивалентны.

С другой стороны, Колмогоров и Синай построили инвариант (называемый энтропией) для некоторого класса перемешивающих измеримых преобразований — так называемых К-систем. На $\{1\}^\perp$ существует ортонормированный базис $\{\psi_{n,m}\}_{n,m=-\infty}^{\infty}$, такой, что для унитарного оператора U, индуцированного К-системой, $U\psi_{n,m}=\psi_{n+1,m}$. Таким образом, все унитарные операторы, индуцированные К-системами, унитарно эквивалентны. Тем не менее существуют К-системы с различной энтропией, так что инварианты индуцированных унитарных операторов не полностью характеризуют все преобразования, сохраняющие меру.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ *VII.1.* Доказательство и обсуждение конечномерной спектральной теоремы см. в книге: П. Р. Халмош, Конечномерные векторные пространства, Физматгиз, М., 1963.

Подобное, но несколько отличающееся доказательство теоремы VII.1 приведено в книге: E. Nelson, Topics in Dynamics, v.I, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1969.

Общее функциональное исчисление $A \mapsto f(A)$ для функций f, аналитических в окрестности $\sigma(A)$, о котором мы упоминали, часто называют *функциональным исчислением Данфорда* после появления статьи: N. Dunford, Spectral Theory I, Convergence to Projections, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **54** (1943), 185—217. Основная идея состоит в том, чтобы выбрать контур C в области определения f так, чтобы $\sigma(A)$ содержался внутри C. Затем полагают $f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-A)^{-1}dz$. Тогда, например, из тождества Гильберта $(z-A)^{-1}(w-A)^{-1}=(w-z)^{-1}\cdot[(z-A)^{-1}-(w-A)^{-1}]$ вытекает свойство $(fg)(A)=f(A)g(A)$. Дальнейшее обсуждение см. в книге: Н. Данфорд и Дж. Шварц, Линейные операторы, т. 1, ИЛ, М., 1962, стр. 605—624 (см. также задачу 1).

§ *VII.2.* Обзор истории спектральной теоремы см. в статье: E. Hellinger, O. Toeplitz, *Encyklop. Math. Wiss.* II C, 13 (1928), 1335—1616.

Вывод спектральной теоремы в терминах функционального исчисления обсуждается также в книге: J. Dixmier, Les Algèbres d'Opérateurs dans l'Espace Hilbertien, Gauthier-Villars, Paris, 1969, Appendix. Спектральная теорема в терминах оператора умножения обсуждается в книге Нельсона (см. замечания к § VII. 1), стр. 66—74.

Появилась обширная литература о «строгих» дираковых обозначениях, стремящаяся полнее использовать все преимущества бра- и кет-векторов. Первоначальные обозначения приведены в монографии П. А. М. Дирака: Принципы квантовой механики, Физматгиз, М., 1960. Строгие модификации в терминах «оснащенных гильбертовых пространств» см. в книге К. Морена (K. Maurin, General Eigenfunction Expansions and Unitary Representations of Topological Groups, Polish Scientific Publ., 1968) и в статьях: J. Roberts, The Dirac Bra and Ket Formalism, *J. Math. Phys.*, **7** (1966), 1097—1104; Rigged Hilbert Spaces in Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **3** (1966), 98—119; J. P. Antoine, Dirac Formalism and Symmetry Problems in Quantum Mechanics I, II, *J. Math. Phys.*, **10** (1969), 53—69, 2277—2290. Мы должны подчеркнуть, что, по нашему мнению, спектральной теоремы достаточно для любых рассуждений, где нестрогий подход может основываться на технике Дирака. Поэтому мы можем рекомендовать абстрактный подход на базе оснащенных пространств лишь тем читателям, которым жаль расстаться с формализмом Дирака.

Дополнительное исследование спектров σ_{ac}, σ_{sing}, σ_{pp} приведено в монографии Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972, стр. 637—643.

Теория кратностей самосопряженных операторов восходит к статьям: H. Hahn, Über die Integrale des Herrn Hellinger und die Orthogonalin varianten der quadratischen Formen von unendlich Veränderlichen, *Monatsh. Math. Phy.*, **23** (1912), 161—224; E. Hellinger, Neuer Begründung der Theorie der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen, *J. Reine Angew. Math.*, **136** (1907), 210—271. Более современное изложение можно найти в книге Нельсона (см. замечания к § VII.1), стр. 77—97. Понятие класса мер часто является точным непрерывным аналогом понятия подмножества дискретного множества. Эту мысль особенно подчеркивает Макки (G. W. Mackey, in Group Representations and Applications, Oxford Lectures, pp. 48—80).

Почти вся рассмотренная спектральная теория допускает разумное обобщение на несепарабельный случай. Только ради удобства и краткости мы рассматривали лишь сепарабельные пространства.

§ VII.3. Спектральная теорема в двух родственных формах: в терминах проекторнозначных мер и в терминах разложения единицы — рассматривается в книгах: М. А. Наймарк, Нормированные кольца, «Наука», М., 1968, или L. Lorch, Spectral Theory, Oxford Univ. Press, London and New York, 1962. Метод Лорха тесно связан с данфордовым функциональным исчислением и формулой Стоуна. Похожая точка зрения принята в книге Като (см. замечания к § VII.2).

Формула Стоуна восходит к классической монографии М. Стоуна (M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Space and Their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1932).

Термин «существенный спектр» возник в знаменитой работе Г. Вейля о сингулярных дифференциальных операторах (H. Weyl, Über gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitäten und die zugehörigen Entwicklungen Willkurlicher Funktionen, *Math. Ann.*, **68** (1910), 220—269). Например, если $H = -d^2/dx^2 + V$ отвечает случаю предельной точки на бесконечности, а операторы H_λ — различные расширения H в $L^2(0, \infty)$ с различными граничными условиями, то Вейль называет $\bigcap \sigma(H_\lambda)$ существенным спектром, т. е. спектром, не зависящим от граничных условий. Оказывается, что $\sigma_{ess}(H_\lambda)$ один и тот же для каждого λ и, таким образом, как раз и является существенным спектром Вейля. Обсуждение этого совпадения приведено в § XIII.3.

§ VII.4. Купманизм восходит к фундаментальной статье Купмана (см. замечания к § II.4). Большая часть обсуждаемых здесь вопросов содержится в обзорной статье Вайтмана и книгах Авеца—Арнольда и Халмоша (замечания к § II.4). В частности, доказательства теорем VII.14 (b) и VII.16 можно найти в книге Халмоша.

Перемешивание ввел Е. Хопф в своей заметке: E. Hopf, Complete Transitivity and the Ergodic Principle, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 18 (1932), 204—209.

Теорема Халмоша и фон Неймана (теорема VII.16) впервые доказана в работе: J. von Neumann, Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik, *Ann. Math.*, 33 (1932), 587—642. Упрощения и дополнения можно найти в статье: P. R. Halmos and J. von Neumann, Operator Methods in Classical Mechanics, II, *Ann. Math.*, 43 (1942), 332—350. Халмош и фон Нейман также доказали, что всевозможные дискретные спектры эргодических преобразований суть все счетные подгруппы окружности.

Энтропия для К-систем была введена в статье А. Н. Колмогорова: Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, *ДАН СССР*, 124 (1959), 754—755. Она обобщает одну идею К. Шеннона (C. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Tech. J.*, 27 (1948), 379—423, 623—656) и дальше рассматривается в работе Я. Г. Синая: Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, I, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 25 (1961), 899—924. Хорошее введение в эту теорию см. в книге П. Биллингслея: Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

В важной серии статей Орнстейн выяснил, в какой степени энтропия — различающий инвариант. Основная статья этой серии: D. Ornstein, Bernoulli Shifts with the Same Entropy are Isomorphic, *Advan. Math.*, 4 (1970), 337—352.

ЗАДАЧИ

**1.* Пусть f аналитична в окрестности $\sigma(A)$, где A — ограниченный оператор, и пусть C — контур, показанный на рис. VII.3. Определим $f(A)$ формулой

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-A)^{-1}\,dz.$$

Докажите, что $fg(A)=f(A)g(A)$.

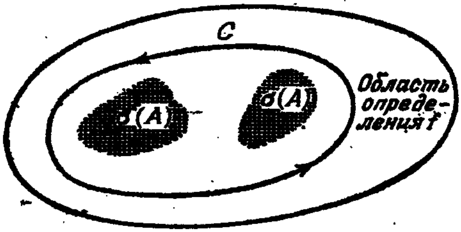

Рис. VII.3. Контур C.

2. Предположим, что $\sigma(A)$ не связен, скажем $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 не пересекаются и замкнуты. Рассмотрим функцию f, которая равна 1 в окрестности σ_1 и 0 в окрестности σ_2. Докажите, что оператор $P=f(A)$, определенный как в задаче 1, есть проектор и что $PA=AP$. Докажите, что $\mathscr{H}_1=\operatorname{Ran}P$ — инвариантное подпространство для A и что $\sigma(A\restriction\mathscr{H}_1)=\sigma_1$.

3. (a) Докажите, что если A нормален, т. е. $AA^*=A^*A$, то

$$\|A\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|\equiv r(A).$$

Указание: используйте формулы $\|A\|^2=\|A^*A\|$ и $r(A)=\lim\|A^n\|^{1/n}$.

(b) Докажите, что для любого полинома P и любого нормального оператора A: $\|P(A)\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|P(\lambda)|$.

**4.* Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — *коммутирующие* ограниченные самосопряженные операторы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

(a) Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ — борелевы множества в $\mathbb{R}$. Докажите, что все $P_{\Omega_1}(A_1), P_{\Omega_2}(A_2), \ldots, P_{\Omega_n}(A_n)$ коммутируют.