§ VII.4. Купманизм восходит к фундаментальной статье Купмана (см. замечания к § II.4). Большая часть обсуждаемых здесь вопросов содержится в обзорной статье Вайтмана и книгах Авеца—Арнольда и Халмоша (замечания к § II.4). В частности, доказательства теорем VII.14 (b) и VII.16 можно найти в книге Халмоша.

Перемешивание ввел Е. Хопф в своей заметке: E. Hopf, Complete Transitivity and the Ergodic Principle, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 18 (1932), 204—209.

Теорема Халмоша и фон Неймана (теорема VII.16) впервые доказана в работе: J. von Neumann, Zur Operatorenmethode in der Klassischen Mechanik, *Ann. Math.*, 33 (1932), 587—642. Упрощения и дополнения можно найти в статье: P. R. Halmos and J. von Neumann, Operator Methods in Classical Mechanics, II, *Ann. Math.*, 43 (1942), 332—350. Халмош и фон Нейман также доказали, что всевозможные дискретные спектры эргодических преобразований суть все счетные подгруппы окружности.

Энтропия для К-систем была введена в статье А. Н. Колмогорова: Об энтропии на единицу времени как метрическом инварианте автоморфизмов, *ДАН СССР*, 124 (1959), 754—755. Она обобщает одну идею К. Шеннона (C. Shannon, A Mathematical Theory of Communication, *Bell System Tech. J.*, 27 (1948), 379—423, 623—656) и дальше рассматривается в работе Я. Г. Синая: Динамические системы со счетнократным лебеговским спектром, I, *Изв. АН СССР*, сер. матем., 25 (1961), 899—924. Хорошее введение в эту теорию см. в книге П. Биллингслея: Эргодическая теория и информация, «Мир», М., 1969.

В важной серии статей Орнстейн выяснил, в какой степени энтропия — различающий инвариант. Основная статья этой серии: D. Ornstein, Bernoulli Shifts with the Same Entropy are Isomorphic, *Advan. Math.*, 4 (1970), 337—352.

ЗАДАЧИ

**1.* Пусть f аналитична в окрестности $\sigma(A)$, где A — ограниченный оператор, и пусть C — контур, показанный на рис. VII.3. Определим $f(A)$ формулой

$$f(A)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)(z-A)^{-1}\,dz.$$

Докажите, что $fg(A)=f(A)g(A)$.

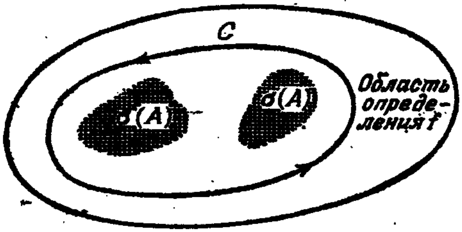

Рис. VII.3. Контур C.

2. Предположим, что $\sigma(A)$ не связен, скажем $\sigma(A)=\sigma_1\cup\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 не пересекаются и замкнуты. Рассмотрим функцию f, которая равна 1 в окрестности σ_1 и 0 в окрестности σ_2. Докажите, что оператор $P=f(A)$, определенный как в задаче 1, есть проектор и что $PA=AP$. Докажите, что $\mathscr{H}_1=\operatorname{Ran}P$ — инвариантное подпространство для A и что $\sigma(A\upharpoonright\mathscr{H}_1)=\sigma_1$.

3. (a) Докажите, что если A нормален, т. е. $AA^*=A^*A$, то

$$\|A\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|\lambda|\equiv r(A).$$

Указание: используйте формулы $\|A\|^2=\|A^*A\|$ и $r(A)=\lim\|A^n\|^{1/n}$.

(b) Докажите, что для любого полинома P и любого нормального оператора A: $\|P(A)\|=\sup_{\lambda\in\sigma(A)}|P(\lambda)|$.

**4.* Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — *коммутирующие* ограниченные самосопряженные операторы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

(a) Пусть $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$ — борелевы множества в $\mathbb{R}$. Докажите, что все $P_{\Omega_1}(A_1), P_{\Omega_2}(A_2), \ldots, P_{\Omega_n}(A_n)$ коммутируют.

(b) Пусть f — функция на $\mathbb{R}^n$, являющаяся линейной комбинацией характеристических функций прямоугольников (т. е. множеств вида $\Omega=\Omega_1\times\ldots\times\Omega_n$). Покажите, что f можно представить в виде

$$f=\sum_{i=1}^{n} c_i\chi_{\Omega^{(i)}},\quad \text{где } \Omega^{(i)}\cap\Omega^{(j)}=\varnothing \text{ при } i\neq j.$$

(c) Для f приведенного выше вида определите

$$f(A_1,\ldots,A_n)=\sum_{i=1}^{n} c_i P_{\Omega_1^{(i)}}(A_1)\ldots P_{\Omega_n^{(i)}}(A_n),$$

где $\Omega^{(i)}=\Omega_1^{(i)}\times\ldots\times\Omega_n^{(i)}$.

(d) Используя теорему об ограниченном линейном отображении, постройте функциональное исчисление $f(A_1,\ldots,A_n)$ для непрерывных функций на $[-\|A_1\|,\|A_1\|]\times\ldots\times[-\|A_n\|,\|A_n\|]$.

(e) Постройте борелево функциональное исчисление.

(f) Докажите существование оператора $U\colon\mathscr{H}\to L^2(M,d\mu)$ для некоторого пространства с конечной мерой $\langle M,\mu\rangle$ и ограниченных вещественнозначных борелевых функций $F_1(m),\ldots,F_n(m)$ на M, таких, что

$$[(UA_iU^{-1})f](m)=F_i(m)f(m).$$

5. Пусть A — нормальный оператор. Докажите, что

(a) $A=B+iC$, где B и C — коммутирующие самосопряженные операторы;

(b) существуют оператор $U\colon\mathscr{H}\to L^2(M,d\mu)$ для некоторой конечной меры μ на некотором пространстве M и ограниченная борелева функция $F(m)$ (вообще говоря, комплекснозначная), такие, что

$$(UAU^{-1}f)(m)=F(m)f(m).$$

Литература к задачам 4, 5: Нельсон (см. замечания к § VII.1).

**6*. Расширьте задачу 4 на случай счетного числа A_n. *Указание:* используйте топологию произведения на $\mathsf{X}[-\|A_n\|,\|A_n\|]$.

†*7*. Найдите самосопряженный оператор A, для которого $[0,1]\subset\sigma_{\text{sing}}(A)$. [*Указание:* выберите A с простым спектром так, чтобы его спектральная мера была бесконечной взвешенной суммой сдвигов канторовых мер.]

†*8*. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор, и пусть f — непрерывная функция на $\sigma(A)$.

(a) Если $\lambda\notin\operatorname{Ran} f$, положим $g=(f-\lambda)^{-1}$. Докажите, что

$$\phi(g)=(\phi(f)-\lambda)^{-1}.$$

(b) Пусть $\lambda\in\operatorname{Ran} f$. Докажите, что существуют такие $\psi\in\mathscr{H}$, что $\|\psi\|=1$ и норма $\|(\phi(f)-\lambda)\psi\|$ произвольно мала, так что $\lambda\in\sigma(\phi(f))$.

(c) Завершите доказательство пункта (e) теоремы VII.1.

†*9*. Предположим, что f непрерывна и не неотрицательна на $\sigma(A)$, где A — ограниченный самосопряженный оператор. Покажите, что тогда существует $\psi\in\mathscr{H}$, удовлетворяющий условию $(\psi,\phi(f)\psi)<0$.

†*10*. Докажите, что в случае, когда A самосопряжен (теорема VII.1) или нормален (задача 5), образом множества непрерывных функций при отображении ϕ является C^*-алгебра, порождаемая оператором A.

11. Предположим, что $\phi\colon C(X)\to\mathscr{L}(\mathscr{H})$ — алгебраический $*$-гомоморфизм, X — компактное хаусдорфово пространство.

(a) Докажите, что $\phi(f)\geqslant 0$, если $f\geqslant 0$.

(b) Докажите, что $\|\phi(f)\|\leqslant\|f\|_\infty$.

†*12.* Пусть $A \geqslant 0$. Докажите, что $(A-\lambda)^{-1}$ существует при $\lambda < 0$.

†*13.* Восполните детали доказательства теоремы VII.2.

14. Докажите, что самосопряженный оператор на конечномерном пространстве имеет циклический вектор тогда и только тогда, когда у него нет повторяющихся собственных значений.

†*15.* Докажите лемму 2, нужную для доказательства теоремы VII.3.

16. Завершите сведение оператора из примера 3 § VII.2 к оператору умножения. Имеет ли этот оператор однородную кратность? Какую?

†*17.* (a) Докажите, что $\sigma(A) = \operatorname{supp}\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$, если $\{\mu_n\}_{n=1}^{N}$ — спектральные меры. (Первое предложение после теоремы VII.3.)

(b) Пусть T_F — оператор умножения на F — вещественнозначную ограниченную измеримую функцию. Докажите, что $\sigma(T_F)$ — существенная область значений F.

†*18.* Пусть A — умножение на x на $L^2(\mathbb{R}, d\mu) = L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac}) \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{pp}) \oplus \oplus L^2(\mathbb{R}, d\mu_{sing})$. Пусть $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu)$. Докажите, что $d\mu_\psi$ абсолютно непрерывна тогда и только тогда, когда $\psi \in L^2(\mathbb{R}, d\mu_{ac})$.

**19.* Можно ли построить меру на $[0, 1]$, абсолютно непрерывную по отношению к dx, с носителем $[0, 1]$, но не эквивалентную dx; иными словами, является ли supp $\langle\mu\rangle$ различающим инвариантом для классов мер, абсолютно непрерывных по отношению к dx?

20. Пусть $A = U|A|$ — полярное разложение A. Пусть f_n определяется так: $f_n(x) = 1/x$ при $x \geqslant 1/n$ и $f_n(x) = 1/n$ при $x \leqslant 1/n$. Докажите, что $U = \text{s-lim}\, Af_n(|A|)$. Заключите отсюда, что U принадлежит алгебре фон Неймана, порождаемой оператором A, т. е. наименьшей сильно замкнутой $*$-алгебре, содержащей A.

†*21.* (a) Докажите, что условия (a) и (b) теоремы VII.5 равносильны.

*(b) Докажите, что условие (a) теоремы VII.5 влечет за собой в общем случае условие (c). [*Указание:* докажите, что $\{B \mid AB = BA\} = L^\infty(M, d\mu)$.]

(c) Докажите, что (c) влечет за собой (a) в конечномерном случае.

†*22.* (a) Докажите, что свойства (a) — (d) проекторнозначных мер выполняются для спектральных проекторов оператора A.

(b) Докажите, что условие (d) для проекторнозначных мер следует из (a) и (c).

†*23.* (a) Воспроизведите детали доказательства теоремы VII.7.

(b) Докажите, что $f(A) = \int f(\lambda)\, dP_\lambda$, если $P_\Omega = \chi_\Omega(A)$.

(c) Если $A = \int \lambda\, dP_\lambda$, докажите, что $P_\Omega = \chi_\Omega(A)$.

†*24.* Докажите, что $\lambda \in \sigma(A)$ тогда и только тогда, когда $P_{(\lambda-\varepsilon,\, \lambda+\varepsilon)}(A) \neq 0$ для всех ε.

25. Рассматривая компактные операторы, покажите, что σ_{disc} не всегда замкнут.

†*26.* (a) Докажите теорему VII.10.

(b) Докажите теорему VII.11.

27. Пусть C — самосопряженный компактный оператор. Что представляет собой $\sigma_{ess}(C)$? Как это связано со свойством инвариантности σ_{ess}, отмеченным в конце § VII.3?

28. (a) Предположим, что μ — мера единичной массы, обладающая таким свойством: для заданного $0 < x < 1$ существует такое множество $N \subset M$, что $\mu(N) = x$. Пусть T: $M \longrightarrow M$ сохраняет меру и $T^k = I$ для некоторого k. Докажите, что T не эргодичен.

(b) Докажите непосредственно, что $T_{a,b}$ из примера 1 § VII.4 не эргодичен, если $na + mb = r$ имеет решение при целом r и $\langle n, m \rangle \neq \langle 0, 0 \rangle$ (т. е. докажите это, не обращаясь к унитарному оператору U).

29. Покажите, что каждое из следующих измеримых преобразований эквивалентно преобразованию пекаря:

(a) $M = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=-\infty}^{\infty} A_n$, где каждое A_n — двухточечное множество, $\{O_n, P_n\} = A_n$ [Орел, Решка]; μ — произведение мер, $\mu = \bigotimes\limits_{n=-\infty}^{\infty} \mu_n$, где $\mu_n(\{O_n\}) = 1/2 = \mu_n(\{P_n\})$. Определим T: $M \longrightarrow M$ как правый сдвиг. (Это называется пространством честной игры в орлянку.)

(b) $M = \mathop{\mathsf{X}}\limits_{n=-\infty}^{\infty} B_n$, где каждое B_n — трехточечное множество, $B_n = \{0, 1, 2\}$; μ — произведение мер, $\mu = \bigotimes\limits_{n=-\infty}^{\infty} \nu_n$, где $\nu_n(\{0\}) = 1/2 = \nu_n(\{2\})$, $\nu_n(\{1\}) = 0$; T — правый сдвиг.

(c) M — квадрат, мера — произведение канторовой меры на себя; T задано так:

$$T\langle x, y\rangle = \begin{cases} \langle 3x, y/3\rangle, & \text{если } 0 \leqslant x < 1/3, \\ \langle 3x-1, y/3+1/3\rangle, & \text{если } 1/3 \leqslant x < 2/3, \\ \langle 3x-2, y/3+2/3\rangle, & \text{если } 2/3 \leqslant x < 1. \end{cases}$$

30. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и T: $M \longrightarrow M$. Определим $T \otimes T$: $M \times M \longrightarrow M \times M$ формулой $(T \otimes T)\langle x, y\rangle = \langle Tx, Ty\rangle$.

(a) Покажите, что $\mu \otimes \mu$ — инвариантная мера для $T \otimes T$, если μ — инвариантная мера для T.

(b) Найдите пример, который показывает, что $T \otimes T$ не обязано быть эргодическим для $\langle M \times M, \mu \otimes \mu\rangle$, даже если T эргодичен для $\langle M, \mu\rangle$. [*Указание*: обратите внимание на пример 1 § VII.4.]

(c) Покажите, что $T \otimes T$ — перемешивающее для $\langle M \times M, \mu \otimes \mu\rangle$, если T — перемешивающее для $\langle M, \mu\rangle$.

(d) Покажите еще раз, используя (c), что преобразование примера 1 не перемешивающее.

Замечание: известно, что $T \otimes T$ эргодично тогда и только тогда, когда T — слабо перемешивающее.

31. Докажите, что замкнутыми $*$-идеалами в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, где $\mathscr{H}$ сепарабельно, являются только $\{0\}$, $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$ и $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. *Указание*. Если идеал $\mathscr{I}$ строго содержит $\mathrm{Com}(\mathscr{H})$, найдите самосопряженный некомпактный оператор $A \in \mathscr{I}$. Покажите, что для любого интервала (a, b), такого, что $0 \notin (a, b)$, $P_{(a,b)}(A) \in \mathscr{I}$. Выведите отсюда, что $\mathscr{I}$ содержит бесконечномерный проектор и что, таким образом, $I \in \mathscr{I}$.

32. (a) Пусть A — самосопряженный, а U_λ — частично изометрический оператор в разложении $U_\lambda |A - \lambda| = A - \lambda$. Докажите, что $U_\lambda = P_{(\lambda, \infty)} - P_{(-\infty, \lambda)}$ и что $P_{(-\infty, \lambda)} = \lim\limits_{\mu \uparrow \lambda} (1 - U_\mu)/2$ и $P_{(-\infty, \lambda]} = \lim\limits_{\mu \downarrow \lambda} (1 - U_\mu)/2$.

(b) Для заданного самосопряженного оператора, используя полярное разложение и формулу пункта (a), докажите спектральную теорему без обращения к функциональному исчислению.