VIII. НЕОГРАНИЧЕННЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Занятия математикой, говорю я им, превосходное средство против вожделений плоти.

ТОМАС МАНН, «ВОЛШЕБНАЯ ГОРА»

VIII. 1. Области определения, графики, сопряженные операторы и спектр

Неограниченность многих из наиболее важных операторов, встречающихся в математической физике,— непреложный факт. В этой главе мы введем некоторые основные понятия и докажем ряд теорем, необходимых для работы с неограниченными операторами в гильбертовых пространствах. Как утверждает теорема Хеллиигера — Теплица (см. § III.5), оператор A, определенный на всем пространстве и удовлетворяющий условию $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, с необходимостью есть ограниченный оператор; тем самым произвольный неограниченный оператор T определен лишь на плотном линейном подмножестве гильбертова пространства $\mathcal{H}$. Итак, **оператор** на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ — это линейное отображение из его области определения (линейного подпространства $\mathcal{H}$) в $\mathcal{H}$. За исключением специально оговоренных случаев, мы всегда будем предполагать, что эта область плотна. Такое подпространство, обозначаемое $D(T)$, называется **областью определения** оператора T. Таким образом, чтобы задать неограниченный оператор на гильбертовом пространстве, необходимо сначала определить область, на которой он действует, а потом указать, как он действует на этом подпространстве.

Пример 1 (оператор координаты). Пусть $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$, и пусть $D(T)$ — множество функций φ из $L^2(\mathbb{R})$, удовлетворяющих условию $\int\limits_{\mathbb{R}} x^2 |\varphi(x)|^2 dx < \infty$. Для $\varphi \in D(T)$ положим $(T\varphi)(x) = x\varphi(x)$.

Очевидно, что T неограничен, поскольку, выбирая носитель φ достаточно близко к плюс или минус бесконечности, мы можем сделать норму $\|T\varphi\|$ сколь угодно большой, сохраняя при этом $\|\varphi\| = 1$. Конечно, даже при $\varphi \notin D(T)$ произведение $x\varphi(x)$ — корректно определенная функция, однако она ие принадлежит $L^2(\mathbb{R})$. Итак, если мы хотим работать только с гильбертовым пространством $L^2(\mathbb{R})$, мы обязаны ограничить область определения оператора T. Выбранная нами область — наибольшая, для которой значения оператора лежат в $L^2(\mathbb{R})$.

Пример 2. Пусть $\mathscr{H}=L^2(\mathbb{R})$ и $D(T)=\mathscr{S}(\mathbb{R})$. На $D(T)$ положим $T\psi(x)=-\psi''(x)+x^2\psi(x)$. Если $\varphi_n(x)$ есть n-я функция Эрмита (см. дополнение к § V.3), то $\varphi_n(x)\in D(T)$ и $T\varphi_n(x)=(2n+1)\varphi_n(x)$. Таким образом, T обязан быть неограниченным, потому что он имеет сколь угодно большие собственные значения.

При изучении неограниченных операторов очень полезно введенное фон Нейманом понятие графика линейного преобразования.

Определение. **График** $\Gamma(T)$ линейного преобразования T есть множество пар

$$\{\langle\varphi, T\varphi\rangle \mid \varphi\in D(T)\}.$$

Следовательно, $\Gamma(T)$ является подмножеством пространства $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$ — гильбертова пространства с внутренним произведением

$$(\langle\varphi_1, \psi_1\rangle, \langle\varphi_2, \psi_2\rangle)=(\varphi_1, \varphi_2)+(\psi_1, \psi_2).$$

Оператор T называется **замкнутым**, если $\Gamma(T)$ — замкнутое подпространство в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$.

Определение. Пусть T_1 и T — операторы в $\mathscr{H}$. Если $\Gamma(T_1)\supset\Gamma(T)$, то T_1 называется **расширением** оператора T; в таком случае мы пишем $T_1\supset T$. Иными словами, $T_1\supset T$ тогда и только тогда, когда $D(T_1)\supset D(T)$ и $T_1\varphi=T\varphi$ для всех $\varphi\in D(T)$.

Определение. Говорят, что оператор T **допускает замыкание** (**замыкаем**), если он имеет замкнутое расширение. Каждый замыкаемый оператор имеет наименьшее замкнутое расширение, называемое **замыканием** и обозначаемое $\overline{T}$.

Естественно попытаться построить замкнутое расширение оператора T путем замыкания его графика в $\mathscr{H}\times\mathscr{H}$. Но здесь нас подстерегает опасность: множество $\overline{\Gamma(T)}$ не обязано быть графиком какого-либо оператора (см., например, задачу 1). Однако большей частью мы будем иметь дело с симметрическими операторами (вводимыми в § VIII.2), а они, как мы увидим, всегда имеют замкнутое расширение.

Предложение. Если T допускает замыкание, то $\Gamma(\overline{T})=\overline{\Gamma(T)}$.

Доказательство. Предположим, что S — замкнутое расширение T. Тогда $\overline{\Gamma(T)}\subset\Gamma(S)$, так что если $\langle 0, \psi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$, то $\psi=0$. Определим оператор R на $D(R)=\{\psi \mid \langle\psi, \phi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$ для некоторого $\phi\}$ формулой $R\psi=\phi$, где $\phi\in\mathscr{H}$ — тот самый вектор, для которого $\langle\psi, \phi\rangle\in\overline{\Gamma(T)}$. Отсюда $\Gamma(R)=\overline{\Gamma(T)}$, так что R — замкнутое расширение T. Но $R\subset S$, где S — произвольное замкнутое расширение. Следовательно, $R=\overline{T}$. ∎

Следующий пример иллюстрирует только что введенные понятия.

Пример 3. Пусть $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, $D(T)=C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $D(T_1)=C_0^1(\mathbb{R})$ — множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем. Пусть $Tf=if'(x)$, если $f\in D(T)$, и $T_1f=if'(x)$, если $f\in D(T_1)$. Тогда T_1 — расширение T. Покажем, что $\overline{\Gamma(T)}\supset\Gamma(T_1)$. Тогда, доказав, что T — симметрический оператор и потому допускает замыкание, мы получим, что $\overline{T}$ расширяет T_1. Введем сначала «аппроксимативную единицу» $\{j_\varepsilon(x)\}$. Пусть $j(x)$ — некоторая положительная бесконечно дифференцируемая функция с носителем на $(-1, 1)$, такая, что $\int_{-\infty}^{\infty} j(x)dx=1$. Положим $j_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-1}j(x/\varepsilon)$. Для $\varphi\in D(T_1)$ положим

$$\varphi_\varepsilon(x)=\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}|\varphi_\varepsilon(x)-\varphi(x)| &\leqslant \int j_\varepsilon(x-t)\,|\varphi(t)-\varphi(x)|\,dt\leqslant\\ &\leqslant\Bigl(\sup_{\{t\mid |x-t|<\varepsilon\}}|\varphi(t)-\varphi(x)|\Bigr)\int_{\mathbb{R}} j_\varepsilon(x-t)\,dt=\\ &=\sup_{\{t\mid |x-t|<\varepsilon\}}|\varphi(t)-\varphi(x)|.\end{aligned}$$

Поскольку φ имеет компактный носитель, она равномерно непрерывна, что влечет за собой равномерную сходимость $\varphi_\varepsilon\to\varphi$. Так как носитель φ_ε лежит в фиксированном компактном множестве, то $\varphi_\varepsilon\to\varphi$ в $L^2(\mathbb{R})$. Аналогично

$$\begin{aligned}i\frac{d}{dx}\varphi_\varepsilon(x) &=\int_{-\infty}^{\infty} i\frac{d}{dx}j_\varepsilon(x-t)\,\varphi(t)\,dt=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\Bigl(-i\frac{d}{dt}j_\varepsilon(x-t)\Bigr)\varphi(t)\,dt=\\ &=\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(x-t)\,i\frac{d}{dt}\varphi(t)\,dt\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})} i\frac{d}{dx}\varphi(x).\end{aligned}$$

Поскольку функция $j_\varepsilon(x)$ имеет компактный носитель и бесконечно дифференцируема, $\varphi_\varepsilon\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Итак, $\varphi_\varepsilon\in D(T)$ при любом $\varepsilon>0$. Таким образом, выше показано, что $\varphi_\varepsilon\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}\varphi$ и $T\varphi_\varepsilon\xrightarrow{L^2(\mathbb{R})}T_1\varphi$ для любого $\varphi\in D(T_1)$. Следовательно, замыкание графика T содержит график T_1.

Понятие сопряженного оператора можно распространить и на случай неограниченных операторов.

Определение. Пусть T — плотно определенный линейный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть $D(T^*)$ — множество $\varphi \in \mathcal{H}$, для которых существуют такие $\eta \in \mathcal{H}$, что

$$(T\psi, \varphi) = (\psi, \eta) \text{ для всех } \psi \in D(T). \qquad \text{(VIII.1)}$$

Для каждого $\varphi \in D(T^*)$ положим $T^*\varphi = \eta$. Оператор T^* называется **сопряженным** к T. По лемме Рисса $\varphi \in D(T^*)$ тогда и только тогда, когда $|(T\psi, \varphi)| \leqslant C\|\psi\|$ для всех $\psi \in D(T)$.

Отметим, что $S \subset T$ влечет за собой $T^* \subset S^*$.

Отметим также, что для того, чтобы η однозначно определялось формулой (VIII.1), необходимо, чтобы область $D(T)$ была плотной. В отличие от случая ограниченных операторов область определения T^*, как показывает следующий пример, может и не быть плотной. В частности, может оказаться, что $D(T^*) = \{0\}$.

Пример 4. Предположим, что f — ограниченная измеримая функция, не лежащая в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть $D(T) = \{\psi \in L^2(\mathbb{R}) \mid \int |f(x)\psi(x)|\,dx < < \infty\}$. Область $D(T)$ заведомо содержит все функции из L^2 с компактными носителями, так что $D(T)$ плотна в $L^2(\mathbb{R})$. Пусть ψ_0 — некоторый фиксированный вектор в $L^2(\mathbb{R})$. Введем T, положив по определению $T\psi = (f, \psi)\psi_0$ для $\psi \in D(T)$. Предположим, что $\varphi \in D(T^*)$; тогда

$$\begin{aligned}(\psi, T^*\varphi) &= (T\psi, \varphi) = ((f, \psi)\psi_0, \varphi) = \\ &= \overline{(f, \psi)}(\psi_0, \varphi) = (\psi, (\psi_0, \varphi) f)\end{aligned}$$

для всех $\psi \in D(T)$. Отсюда $T^*\varphi = (\psi_0, \varphi) f$. Поскольку $f \notin L^2(\mathbb{R})$, имеем $(\psi_0, \varphi) = 0$. Следовательно, любой $\varphi \in D(T^*)$ ортогонален к ψ_0, так что $D(T^*)$ не плотна. В действительности $D(T^*)$ есть в точности множество векторов, перпендикулярных ψ_0, и на этой области определения T^* — нулевой оператор.

Если область определения T^* плотна, то можно ввести $T^{**} = (T^*)^*$. Существует простая связь между понятиями сопряженного оператора и замыкания.

Теорема VIII.1. Пусть T — плотно определенный оператор на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда
(a) T^* замкнут;
(b) T допускает замыкание тогда и только тогда, когда $D(T^*)$ плотна, причем в этом случае $\overline{T} = T^{**}$;
(c) если T допускает замыкание, то $(\overline{T})^* = T^*$.

Доказательство. Определим на $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$ унитарный оператор V:

$$V\langle\phi, \psi\rangle=\langle-\psi, \phi\rangle.$$

В силу унитарности V имеем: $V[E^{\perp}]=(V[E])^{\perp}$ для любого подпространства E. Пусть T — линейный оператор в $\mathcal{H}$ и $\langle\phi, \eta\rangle\in\mathcal{H}\times\mathcal{H}$. Тогда $\langle\phi, \eta\rangle\in V[\Gamma(T)]^{\perp}$ в том и только том случае, когда $(\langle\phi, \eta\rangle, \langle-T\psi, \psi\rangle)=0$ для всех $\psi\in D(T)$, что выполняется тогда и только тогда, когда $(\phi, T\psi)=(\eta, \psi)$ для всех $\psi\in D(T)$, т. е. тогда и только тогда, когда $\langle\phi, \eta\rangle\in\Gamma(T^*)$. Итак, $\Gamma(T^*)=V[\Gamma(T)]^{\perp}$. Поскольку $V[\Gamma(T)]^{\perp}$ — всегда замкнутое подпространство в $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, отсюда следует (a).

Чтобы доказать (b), отметим, что $\Gamma(T)$ — линейное подмножество в $\mathcal{H}\times\mathcal{H}$, так что

$$\begin{aligned}\overline{\Gamma(T)}&=(\Gamma(T)^{\perp})^{\perp}=\\&=(V^2\Gamma(T)^{\perp})^{\perp}=\\&=(V(V\Gamma(T))^{\perp})^{\perp}=\\&=(V\Gamma(T^*))^{\perp}.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом доказательства пункта (a) при плотно определенном T^* следует, что $\overline{\Gamma(T)}$ — график T^{**}.

Обратно, предположим, что $D(T^*)$ не плотна и что $\psi\in D(T^*)^{\perp}$. Простое вычисление показывает, что $\langle 0, \psi\rangle\in[\Gamma(T^*)]^{\perp}$, так что $V[\Gamma(T^*)]^{\perp}$ не является графиком (однозначного) оператора. Поскольку $\overline{\Gamma(T)}=(V\Gamma(T^*))^{\perp}$, мы видим, что T не допускает замыкания.

Чтобы доказать (c), заметим, что если T замыкаем, то

$$T^*=\overline{(T^*)}=T^{***}=(\overline{T})^*.\blacksquare$$

Определение. Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Комплексное число λ принадлежит **резольвентному множеству** $\rho(T)$, если оператор $\lambda I-T$ является биекцией $D(T)$ на $\mathcal{H}$ с ограниченным обратным. Если $\lambda\in\rho(T)$, то $R_\lambda(T)=(\lambda I-T)^{-1}$ называется **резольвентой** оператора T в точке λ.

Для того чтобы точка принадлежала резольвентному множеству оператора T, должно быть выполнено несколько условий. Не все эти условия независимы. Например, если $\lambda I-T$ — биекция $D(T)$ на $\mathcal{H}$, то по теореме о замкнутом графике обратный оператор автоматически ограничен. Другие связи указаны в задаче 2.

Определения **спектра, точечного спектра** и **остаточного спектра** для неограниченных операторов такие же, как и для ограниченных. Иногда мы будем говорить о спектре незамкнутого, но замыкаемого оператора. В этом случае всегда будет иметься в виду спектр замыкания.

Теорема VIII.2. Пусть T — замкнутый плотно определенный линейный оператор. Тогда резольвентное множество T — открытое подмножество комплексной плоскости, на котором резольвента является аналитической операторнозначной функцией. Более того,

$$\{R_\lambda(T) \mid \lambda \in \rho(T)\}$$

— семейство коммутирующих ограниченных операторов, удовлетворяющих соотношению

$$R_\lambda(T) - R_\mu(T) = (\mu - \lambda) R_\mu(T) R_\lambda(T). \qquad \text{(VIII.2)}$$

Доказательство этой теоремы в точности такое же, как и в ограниченном случае (теорема VI.5).

Читателю может показаться, что заботы об областях определения и замыканиях неограниченных операторов вносят технические неудобства, и нужно выбрать любую достаточно малую плотную область определения, на которой неограниченный оператор имеет смысл, чтобы от них избавиться. Однако выбор подходящей области определения часто тесно связан с физической сущностью описываемой ситуации (см., например, обсуждение в § X.1). Далее, многие важные характеристики операторов очень чувствительны к выбору области определения. Следующий пример показывает, что спектр — одна из таких характеристик. В этом примере мы используем понятие абсолютно непрерывной функции и соответствующую фундаментальную теорему анализа. Читатель, не знакомый с определением и теоремой, может найти их в Замечаниях (см. также задачу 20 гл. I).

Пример 5. Обозначим через $AC[0, 1]$ множество абсолютно непрерывных функций на $[0, 1]$, производные которых лежат в $L^2[0, 1]$. Пусть T_1 и T_2 — операция $i\, d/dx$ с областями определения

$$D(T_1) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1]\},$$
$$D(T_2) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1] \text{ и } \varphi(0) = 0\}.$$

Как $D(T_1)$, так и $D(T_2)$ плотны в $L^2[0, 1]$, и соответствующие операторы замкнуты. Однако

(a) спектр T_1 есть $\mathbb{C}$;
(b) спектр T_2 пуст.

Доказательство замкнутости T_1 и T_2 мы оставляем в качестве упражнения (задача 3). Чтобы убедиться, что спектр T_1 — вся плоскость, заметим, что

$$(\lambda I - T_1) e^{-i\lambda x} = 0 \qquad \text{и} \qquad e^{-i\lambda x} \in D(T_1)$$

для всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Что касается T_2, то оператор

$$(S_\lambda g)(x) = i \int_0^x e^{-i\lambda(x-s)} g(s)\, ds$$

удовлетворяет равенству $(\lambda I - T_2) S_\lambda = I$, а $S_\lambda (\lambda I - T_2)$ — тождественный оператор на $D(T_2)$. Более того,

$$\begin{aligned}\|S_\lambda g\|_2^2 &= \int_0^1 |(S_\lambda g)(x)|^2\,dx \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} |(S_\lambda g)(x)|\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)} g(s)|\,ds\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \Big(\int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)}|^2\,ds\Big)\Big)\Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |g(s)|^2\,ds\Big) \leqslant \\ &\leqslant C(\lambda)\|g\|_2^2,\end{aligned}$$

так что S_λ ограничен. В соответствии с замечанием, сделанным сразу после определения резольвентного множества, для доказательства ограниченности S_λ достаточно показать, что $\lambda I - T_2$ — биекция. Это позволило бы избежать предыдущих вычислений.

VIII.2. Симметрические и самосопряженные операторы. Основной критерий самосопряженности

Определение. Плотно определенный оператор T в гильбертовом пространстве называется **симметрическим** (или **эрмитовым**), если $T \subset T^*$, т. е. если $D(T) \subset D(T^*)$ и $T\varphi = T^*\varphi$ для всех $\varphi \in D(T)$. Равносильное условие: T симметричен тогда и только тогда, когда

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi) \text{ для всех } \varphi, \psi \in D(T).$$

Определение. Оператор T называется **самосопряженным**, если $T = T^*$, т. е. тогда и только тогда, когда T симметричен и $D(T) = D(T^*)$.

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, поскольку $D(T^*) \supset D(T)$, а значит, область $D(T^*)$ плотна в $\mathcal{H}$. Если T симметричен, то T^* — замкнутое расширение T, поэтому наименьшее замкнутое расширение T^{**} оператора T должно содержаться в T^*. Итак, для симметрического оператора имеем

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Для замкнутого симметрического оператора

$$T = T^{**} \subset T^*,$$

а для самосопряженного оператора

$$T = T^{**} = T^*.$$