удовлетворяет равенству $(\lambda I - T_2) S_\lambda = I$, а $S_\lambda(\lambda I - T_2)$ — тождественный оператор на $D(T_2)$. Более того,

$$\begin{aligned}\|S_\lambda g\|_2^2 &= \int_0^1 |(S_\lambda g)(x)|^2\,dx \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} |(S_\lambda g)(x)|\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)} g(s)|\,ds\Big)^2 \leqslant \\ &\leqslant \Big(\sup_{x\in[0,1]} \Big(\int_0^x |e^{-i\lambda(x-s)}|^2\,ds\Big)\Big)\Big(\sup_{x\in[0,1]} \int_0^x |g(s)|^2\,ds\Big) \leqslant \\ &\leqslant C(\lambda)\|g\|_2^2,\end{aligned}$$

так что S_λ ограничен. В соответствии с замечанием, сделанным сразу после определения резольвентного множества, для доказательства ограниченности S_λ достаточно показать, что $\lambda I - T_2$ — биекция. Это позволило бы избежать предыдущих вычислений.

VIII.2. Симметрические и самосопряженные операторы. Основной критерий самосопряженности

Определение. Плотно определенный оператор T в гильбертовом пространстве называется **симметрическим** (или **эрмитовым**), если $T \subset T^*$, т. е. если $D(T) \subset D(T^*)$ и $T\varphi = T^*\varphi$ для всех $\varphi \in D(T)$. Равносильное условие: T симметричен тогда и только тогда, когда

$$(T\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi) \text{ для всех } \varphi, \psi \in D(T).$$

Определение. Оператор T называется **самосопряженным**, если $T = T^*$, т. е. тогда и только тогда, когда T симметричен и $D(T) = D(T^*)$.

Симметрический оператор всегда допускает замыкание, поскольку $D(T^*) \supset D(T)$, а значит, область $D(T^*)$ плотна в $\mathcal{H}$. Если T симметричен, то T^* — замкнутое расширение T, поэтому наименьшее замкнутое расширение T^{**} оператора T должно содержаться в T^*. Итак, для симметрического оператора имеем

$$T \subset T^{**} \subset T^*.$$

Для замкнутого симметрического оператора

$$T = T^{**} \subset T^*,$$

а для самосопряженного оператора

$$T = T^{**} = T^*.$$

Отсюда видно, что замкнутый симметрический оператор T самосопряжен тогда и только тогда, когда T^* симметричен.

Различие между замкнутыми симметрическими операторами и самосопряженными операторами очень существенно. Именно для *самосопряженных* операторов выполняется спектральная теорема (см. § VIII.3), и только для *самосопряженных* операторов могут быть построены экспоненты, задающие однопараметрические группы унитарных операторов (см. § VIII.4), описывающие динамику в квантовой механике. Изучению методов доказательства самосопряженности операторов посвящена гл. X. Здесь же мы ограничимся доказательством основного критерия самосопряженности. Введем сначала полезное понятие самосопряженности в существенном.

Определение. Симметрический оператор T называется **в существенном самосопряженным**, если его замыкание $\overline{T}$ самосопряжено. Если T замкнут, то подмножество $D \subset D(T)$ называется **существенной областью (определения)** оператора T, когда $\overline{T \upharpoonright D} = T$.

Если T в существенном самосопряжен, то он имеет одно и только одно самосопряженное расширение. В самом деле, предположим, что S — самосопряженное расширение T. Тогда S замкнут и, следовательно, из $S \supset T$ следует $S \supset T^{**}$. Поэтому $S = S^* \subset (T^{**})^* = T^{**}$, и, значит, $S = T^{**}$. Справедливо и обратное утверждение, а именно, если T имеет одно и только одно самосопряженное расширение, то T в существенном самосопряжен (см. § X.1). Поскольку $T^* = \overline{T}^* = T^{***}$, оператор T в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда

$$T \subset T^{**} = T^*.$$

Самосопряженность в существенном часто помогает в тех случаях, когда задан незамкнутый симметрический оператор T. Если удается доказать его самосопряженность в существенном, то ему однозначно соответствует самосопряженный оператор $\overline{T} = T^{**}$. Иначе говоря, если A — самосопряженный оператор, то для его однозначного задания не обязательно давать точное описание области определения (что часто сложно), достаточно описать какую-либо существенную область A.

Предположим теперь, что T — самосопряженный оператор и что существует такое $\varphi \in D(T^*) = D(T)$, что $T^*\varphi = i\varphi$. Тогда $T\varphi = i\varphi$ и

$$-i(\varphi, \varphi) = (i\varphi, \varphi) = (T\varphi, \varphi) = (\varphi, T^*\varphi) = (\varphi, T\varphi) = i(\varphi, \varphi),$$

так что $\varphi = 0$. Аналогично доказывается, что и $T^*\varphi = -i\varphi$ не имеет решений. Обратное утверждение о том, что если T — замкнутый симметрический оператор и уравнения $T^*\varphi = \pm i\varphi$ не имеют решений, то T самосопряжен, и является основным признаком самосопряженности.

Теорема VIII.3 (основной критерий самосопряженности). Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(a) T самосопряжен;
(b) T замкнут и $\operatorname{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$;
(c) $\operatorname{Ran}(T \pm i) = \mathscr{H}$.

Доказательство. Как мы только что видели, (a) влечет за собой (b). Предположим, что имеет место (b), и докажем (c). Поскольку $T^*\varphi = -i\varphi$ не имеет решений, множество $\operatorname{Ran}(T-i)$ должно быть плотным в $\mathscr{H}$. В противном случае для $\psi \in \operatorname{Ran}(T-i)^{\perp}$ мы имели бы $((T-i)\varphi, \psi) = 0$ при всех $\varphi \in D(T)$, а тогда $\psi \in D(T^*)$ и $(T-i)^*\psi = (T^*+i)\psi = 0$, что невозможно, так как $T^*\psi = -i\psi$ не имеет решений. (Обращая это построение, можно показать, что если $\operatorname{Ran}(T-i)$ — плотное множество, то ядро T^*+i есть $\{0\}$.) В силу плотности $\operatorname{Ran}(T-i)$, нам необходимо доказать лишь его замкнутость, и тогда можно заключить, что $\operatorname{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$. Но для всех $\varphi \in D(T)$

$$\|(T-i)\varphi\|^2 = \|T\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2.$$

Тогда если $\varphi_n \in D(T)$ и $(T-i)\varphi_n \to \psi_0$, то φ_n сходится к некоторому вектору φ_0 и $T\varphi_n$ также сходится. Поскольку T замкнут, $\varphi_0 \in D(T)$ и $(T-i)\varphi_0 = \psi_0$. Отсюда $\operatorname{Ran}(T-i)$ замкнут, а поэтому $\operatorname{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$. Аналогично $\operatorname{Ran}(T+i) = \mathscr{H}$.

Покажем, наконец, что из (c) следует (a). Пусть $\varphi \in D(T^*)$. Поскольку $\operatorname{Ran}(T-i) = \mathscr{H}$, существует такое $\eta \in D(T)$, что $(T-i)\eta = (T^*-i)\varphi$. Но $D(T) \subset D(T^*)$, поэтому $\varphi - \eta \in D(T^*)$ и

$$(T^*-i)(\varphi-\eta) = 0.$$

Но $\operatorname{Ran}(T+i) = \mathscr{H}$, поэтому $\operatorname{Ker}(T^*-i) = \{0\}$, так что $\varphi = \eta \in D(T)$. Это доказывает, что $D(T^*) = D(T)$, т. е. что T самосопряжен. ∎

Следствие. Пусть T — симметрический оператор в гильбертовом пространстве. Тогда следующие утверждения равносильны:

(a) T в существенном самосопряжен;
(b) $\operatorname{Ker}(T^* \pm i) = \{0\}$;
(c) множества $\operatorname{Ran}(T^* \pm i)$ плотны.

В заключение приведем пример, показывающий, что симметрический оператор может иметь много самосопряженных расширений. Чтобы не ввести читателя в заблуждение, отметим, что симметрический оператор может и *совсем не иметь* самосопряженных расширений (см. задачу 4 и § X.1).

Пример. Пусть $T = i\, d/dx$ и

$$D(T) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(0) = 0 = \varphi(1)\}.$$

Простое интегрирование по частям показывает, что T—симметрический оператор в $L^2[0, 1]$. Начнем с определения T^*. Пусть j_ε—функция, введенная в примере 3 § VIII.1. Зафиксируем $0 < \alpha < \beta < 1$ и положим

$$f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = j_\varepsilon(x - \beta) - j_\varepsilon(x - \alpha),$$

$$g_\varepsilon^{\alpha,\beta}(x) = \int_0^x f_\varepsilon^{\alpha,\beta}(t)\, dt.$$

Пусть $\psi \in D(T^*)$. Если ε достаточно мало, то $g_\varepsilon^{\alpha,\beta} \in D(T)$, так что

$$(Tg_\varepsilon^{\alpha,\beta}, \psi) = (g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi). \qquad \text{(VIII.3)}$$

При $\varepsilon \to 0$ последовательность $g_\varepsilon^{\alpha,\beta}$ сходится к характеристической функции интервала (α, β) в $L^2(0, 1)$, откуда

$$(g_\varepsilon^{\alpha,\beta}, T^*\psi) \longrightarrow -\int_\alpha^\beta (T^*\psi)(x)\, dx.$$

Основная оценка примера 3 показывает, что

$$J_\varepsilon\varphi = \int_0^1 j_\varepsilon(x - t)\, \varphi(t)\, dt$$

сходится в L^2 к φ, если φ непрерывна. Более того, каждый оператор J_ε ограничен и имеет норму, не большую единицы, так как если $\psi \in L^2(0, 1)$, то

$$\begin{aligned} |(\psi, J_\varepsilon\varphi)| &\leqslant \iint j_\varepsilon(x - t)\, |\varphi(t)|\, |\psi(x)|\, dx\, dt = \\ &= \iint j_\varepsilon(y)\, |\varphi(t)|\, |\psi(y + t)|\, dy\, dt \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|\, \|\psi\| \int j_\varepsilon(y)\, dy = \\ &= \|\varphi\|\, \|\psi\|. \end{aligned}$$

Используя $\varepsilon/3$-прием, имеем: $J_\varepsilon\varphi \xrightarrow{L^2} \varphi$ для всех $\varphi \in L^2[0, 1]$. Таким образом, левая часть (VIII.3) при $\varepsilon \to 0$ сходится в смысле среднего квадратичного к $-i(\psi(\beta) - \psi(\alpha))$. Итак, для почти всех α, β

$$i(\psi(\beta) - \psi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (T^*\psi)(x)\, dx.$$

Это означает, что ψ абсолютна непрерывна (см. замечания к § VIII.1) и

$$i\frac{d}{dx}\psi(x) = (T^*\psi)(x).$$

Итак, $\psi \in AC[0, 1]$ и $T^*\psi = i\,d\psi(x)/dx$. Обратно, интегрирование по частям показывает, что любой $\psi \in AC[0, 1]$ лежит в области определения T^* и $T^*\psi = i\,d\psi/dx$. Следовательно, $T^* = i\,d/dx$ на $D(T^*) = AC[0, 1]$.

Легко видеть, что T не есть в существенном самосопряженный оператор, поскольку

$$e^{\pm x} \in D(T^*) \text{ и } i\,de^{\pm x}/dx = \pm ie^{\pm x}.$$

Оператор T замкнут (задача 6), и, таким образом, T служит примером замкнутого симметрического, но не самосопряженного оператора.

Имеет ли T самосопряженные расширения? Да, и притом несчетное число различных! Пусть $\alpha \in \mathbb{C}$, $|\alpha| = 1$ и положим $T_\alpha = i\,d/dx$ на

$$D(T_\alpha) = \{\varphi \mid \varphi \in AC[0, 1],\ \varphi(0) = \alpha\varphi(1)\}.$$

Каждый из операторов T_α — самосопряженное расширение T, и при разных α расширения различны (задача 7). Конечно, каждый из T_α, в свою очередь расширяется оператором T^*. Эти расширения изображены на рис. VIII.1. Почему различные расширения образуют именно окружность, будет объяснено в § X.1.

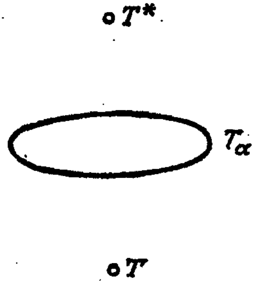

Рис. VIII.1. Самосопряженные расширения T.

VIII.3. Спектральная теорема

Хорошее определение должно быть посылкой теоремы.

ДЖ. ГЛИММ

В этом разделе мы покажем, как обобщить на неограниченные самосопряженные операторы спектральную теорему для ограниченных самосопряженных операторов, изложенную в гл. VII. Чтобы пояснить, к чему мы стремимся, докажем сначала следующее

Предложение 1. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой μ. Предположим, что f — измеримая, вещественнозначная функция на M, конечная п.в. по мере μ. Тогда оператор $\varphi \xrightarrow{T_f} f\varphi$