Это означает, что ψ абсолютна непрерывна (см. замечания к § VIII.1) и

$$i\frac{d}{dx}\psi(x)=(T^*\psi)(x).$$

Итак, $\psi\in AC[0, 1]$ и $T^*\psi=i\,d\psi(x)/dx$. Обратно, интегрирование по частям показывает, что любой $\psi\in AC[0, 1]$ лежит в области определения T^* и $T^*\psi=i\,d\psi/dx$. Следовательно, $T^*=i\,d/dx$ на $D(T^*)=AC[0, 1]$.

Легко видеть, что T не есть в существенном самосопряженный оператор, поскольку

$$e^{\pm x}\in D(T^*) \text{ и } i\,de^{\pm x}/dx=\pm ie^{\pm x}.$$

Оператор T замкнут (задача 6), и, таким образом, T служит примером замкнутого симметрического, но не самосопряженного оператора.

Имеет ли T самосопряженные расширения? Да, и притом несчетное число различных! Пусть $\alpha\in\mathbb{C}$, $|\alpha|=1$ и положим $T_\alpha=i\,d/dx$ на

$$D(T_\alpha)=\{\varphi\mid\varphi\in AC[0, 1],\ \varphi(0)=\alpha\varphi(1)\}.$$

Каждый из операторов T_α — самосопряженное расширение T, и при разных α расширения различны (задача 7). Конечно, каждый из T_α, в свою очередь расширяется оператором T^*. Эти расширения изображены на рис. VIII.1. Почему различные расширения образуют именно окружность, будет объяснено в § X.1.

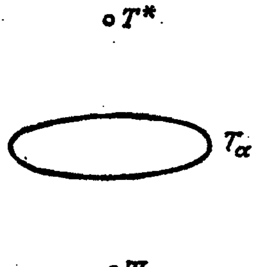

Рис. VIII.1. Самосопряженные расширения T.

VIII.3. Спектральная теорема

Хорошее определение должно быть посылкой теоремы.

ДЖ. ГЛИММ

В этом разделе мы покажем, как обобщить на неограниченные самосопряженные операторы спектральную теорему для ограниченных самосопряженных операторов, изложенную в гл. VII. Чтобы пояснить, к чему мы стремимся, докажем сначала следующее

Предложение 1. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с конечной мерой μ. Предположим, что f — измеримая, вещественнозначная функция на M, конечная п.в. по мере μ. Тогда оператор $\varphi\xrightarrow{T_f}f\varphi$

на $L^2(M, d\mu)$ с областью определения

$$D(T_f) = \{\varphi \mid f\varphi \in L^2(M, d\mu)\}$$

самосопряжен, и $\sigma(T_f)$—существенная область значений f.

Доказательство. Оператор T_f, очевидно, симметричен. Предположим, что $\psi \in D(T_f^*)$, и пусть

$$\chi_N(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } |f(m)| \leqslant N, \\ 0 & \text{во всех других случаях.} \end{cases}$$

Тогда по теореме о монотонной сходимости имеем

$$\begin{aligned} \| T_f^*\psi \| &= \lim_{N\to\infty} \| \chi_N T_f^* \psi \| = \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{\|\varphi\|=1} |(\varphi, \chi_N T_f^*\psi)| \Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{\|\varphi\|=1} |(T_f \chi_N \varphi, \psi)| \Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \Big(\sup_{\|\varphi\|=1} |(\varphi, \chi_N f\psi)| \Big) = \\ &= \lim_{N\to\infty} \| \chi_N f\psi \|. \end{aligned}$$

Итак, $f\psi \in L^2(M, d\mu)$, так что $\psi \in D(T_f)$ и поэтому T_f самосопряжен. Последнее утверждение доказывается, как в ограниченном случае (задача 17 гл. VII). ∎

Если об f знать больше, то что-то можно сказать и об области, на которой T_f в существенном самосопряжен.

Предложение 2. Пусть f и T_f удовлетворяют условиям предложения 1. Предположим также, что $f \in L^p(M, d\mu)$ при $2 < p < \infty$. Пусть D—произвольное плотное множество в $L^q(M, d\mu)$, где $q^{-1} + p^{-1} = 1/2$. Тогда D—существенная область T_f.

Доказательство. Докажем сначала, что L^q—существенная область T_f. В силу неравенства Гёльдера, $\|g\|_2 \leqslant \|1\|_p \|g\|_q$ и $\|fg\|_2 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q$, так что $L^q \subset D(T_f)$. Более того, если $g \in D(T_f)$, то пусть g_n—функции, равные нулю, когда $|g(m)| > n$, и равные g в противном случае. По теореме о мажорированной сходимости $g_n \to g$ и $fg_n \to fg$ в L^2. Так как каждое g_n лежит в L^q, мы заключаем, что L^q—существенная область T_f.

Пусть теперь D плотно в L^q, и пусть $g \in L^q$. Выберем такие $g_n \in D$, что $g_n \to g$ в L^q. Из $\|g_n - g\|_2 \leqslant \|1\|_p \|g_n - g\|_q$ и $\|T_f(g_n - g)\|_2 \leqslant \|f\|_p \|g_n - g\|_q$ следует, что $g \in D(\overline{T_f \restriction D})$. Итак, $L^q \subset D(\overline{T_f \restriction D})$, а значит, D—существенная область. ∎

За исключением случая, когда $f \in L^\infty(M, d\mu)$, оператор T_f, описанный в предложениях 1 и 2, неограничен. Таким образом, мы нашли большой класс неограниченных самосопряженных операторов. На самом деле все они входят в этот класс.

Теорема VIII.4 (спектральная теорема в терминах операторов умножения). Пусть A—самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$ с областью определения $D(A)$. Тогда существуют: пространство $\langle M, \mu\rangle$ с конечной мерой μ, унитарный оператор $U: \mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$ и вещественнозначная конечная п.в. функция f на M, такие, что

(a) $\psi \in D(A)$ тогда и только тогда, когда $f(\cdot)(U\psi)(\cdot) \in \in L^2(M, d\mu)$;

(b) если $\varphi \in U[D(A)]$, то $(UAU^{-1}\varphi)(m) = f(m)\varphi(m)$.

Доказательство. При доказательстве теоремы VIII.3 было показано, что $A+i$ и $A-i$—взаимно однозначные отображения и $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathscr{H}$. Поскольку $A \pm i$ замкнуты, то и $(A \pm i)^{-1}$ замкнуты и, следовательно, ограничены (теорема III.12). По теореме VIII.2 $(A+i)^{-1}$ и $(A-i)^{-1}$ коммутируют. Равенство

$$((A-i)\psi,\ (A+i)^{-1}(A+i)\varphi) = ((A-i)^{-1}(A-i)\psi,\ (A+i)\varphi)$$

и тот факт, что $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \mathscr{H}$, показывают, что $((A+i)^{-1})^* = = (A-i)^{-1}$. Таким образом, $(A+i)^{-1}$ нормален.

Теперь используем несложное обобщение спектральной теоремы для ограниченных самосопряженных операторов на ограниченные нормальные операторы. Доказательство этого обобщения вынесено в задачи 3, 4 и 5 гл. VII. Тогда заключаем, что существуют пространство с конечной мерой $\langle M, \mu\rangle$, унитарный оператор $U: \mathscr{H} \to L^2(M, d\mu)$ и измеримая ограниченная комплекснозначная функция $g(m)$, такие, что $(U(A+i)^{-1}U^{-1}\varphi)(m) = = g(m)\varphi(m)$ для всех $\varphi \in L^2(M, d\mu)$.

Так как множество $\operatorname{Ker}(A+i)^{-1}$ пусто, то $g(m) \neq 0$ п.в. по мере μ, так что функция $f(m) = g(m)^{-1} - i$ конечна п.в. по мере μ. Предположим теперь, что $\psi \in D(A)$. Тогда $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathscr{H}$ и $U\psi = gU\varphi$. Из ограниченности fg заключаем, что $f(U\psi) \in L^2(M, d\mu)$. Обратно, если $f(U\psi) \in L^2(M, d\mu)$, то существует такое $\varphi \in \mathscr{H}$, что $U\varphi = (f+i)U\psi$. Таким образом, $gU\varphi = = g(f+i)U\psi = U\psi$, так что $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$, т. е. $\psi \in D(A)$. Это доказывает (a).

Для доказательства (b) заметим, что если $\psi \in D(A)$, то $\psi = (A+i)^{-1}\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathscr{H}$ и $A\psi = \varphi - i\psi$. Поэтому

$$\begin{aligned}(UA\psi)(m) &= (U\varphi)(m) - i(U\psi)(m) = \\ &= (g(m)^{-1} - i)(U\psi)(m) = \\ &= f(m)(U\psi)(m).\end{aligned}$$

Наконец, если $\operatorname{Im} f > 0$ на множестве ненулевой меры, то существует ограниченное множество B в верхней полуплоскости, такое, что $S=\{x \mid f(x)\in B\}$ имеет ненулевую меру. Если χ — характеристическая функция множества S, то $f\chi \in L^2(M, d\mu)$ и $\operatorname{Im}(\chi, f\chi)>0$. Это противоречит тому, что оператор умножения на f самосопряжен (так как он унитарно эквивалентен A). Следовательно, f вещественнозначна. ∎

Только что доказанная теорема дает естественный способ построения функций от самосопряженных операторов. Для заданной ограниченной борелевой функции h на $\mathbb{R}$ положим по определению

$$h(A)=U^{-1}T_{h(f)}U,$$

где $T_{h(f)}$ — оператор на $L^2(M, d\mu)$, действующий как умножение на функцию $h(f(m))$. При таком определении из теоремы VIII.4 легко получается следующая

Теорема VIII.5 (спектральная теорема в терминах функционального исчисления). Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Тогда существует единственное отображение $\hat{\phi}$ ограниченных борелевых функций на $\mathbb{R}$ в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$, такое, что

(a) $\hat{\phi}$ — алгебраический $*$-гомоморфизм;

(b) $\hat{\phi}$ непрерывно по норме, т. е. $\|\hat{\phi}(h)\|_{\mathscr{L}(\mathscr{H})}\leqslant\|h\|_\infty$;

(c) если $\{h_n(x)\}$ — последовательность ограниченных борелевых функций, такая, что $h_n(x)\xrightarrow[n\to\infty]{}x$ для каждого x и $|h_n(x)|\leqslant|x|$ для всех x и n, то $\lim\limits_{n\to\infty}\hat{\phi}(h_n)\psi=A\psi$ для любого $\psi\in D(A)$;

(d) если $h_n(x)\to h(x)$ поточечно, а последовательность $\|h_n\|_\infty$ ограничена, то $\hat{\phi}(h_n)\to\hat{\phi}(h)$ сильно.

Кроме того,

(e) если $A\psi=\lambda\psi$, то $\hat{\phi}(h)\psi=h(\lambda)\psi$;

(f) если $h\geqslant 0$, то $\hat{\phi}(h)\geqslant 0$.

Функциональное исчисление очень полезно. Например, оно позволяет определить экспоненту e^{itA} и легко доказать многие ее свойства как функции от t (см. следующий раздел). В случае когда A ограничен, для определения экспоненты не требуется функциональное исчисление, поскольку она может быть задана сходящимся по норме степенным рядом.

Функциональное исчисление используется также для построения спектральных мер и теории спектральных кратностей, аналогичной соответствующей теории для ограниченных самосопряженных операторов. Вектор ψ называется **циклическим** для оператора A, если множество $\{g(A)\psi \mid g\in C_\infty(\mathbb{R})\}$ плотно в $\mathscr{H}$. Если ψ — циклический вектор, то $\mathscr{H}$ можно представить как $L^2(\mathbb{R}, d\mu_\psi)$, причем так, чтобы A перешел в оператор умножения на x. Здесь μ_ψ — мера, удовлетворяющая соотношению

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)\, d\mu_\psi(x) = (\psi, g(A)\psi).$$

В общем случае $\mathcal{H}$ разлагается в прямую сумму циклических подпространств, поэтому пространство с мерой M в теореме VIII.4 можно представить как объединение некоторого количества экземпляров $\mathbb{R}$. Как и в случае ограниченных операторов, мы можем ввести $\sigma_{ac}(A)$, $\sigma_{pp}(A)$, $\sigma_{sing}(A)$ и соответствующим образом разложить $\mathcal{H}$.

Наконец, из функционального исчисления легко вывести спектральную теорему в терминах проекторнозначных мер. Пусть P_Ω — оператор $\chi_\Omega(A)$, где χ_Ω — характеристическая функция измеримого множества $\Omega \subset \mathbb{R}$. Семейство операторов $\{P_\Omega\}$ обладает следующими свойствами:

(a) каждый P_Ω — ортогональный проектор;
(b) $P_\varnothing = 0$, $P_{(-\infty,\, \infty)} = I$;
(c) если $\Omega = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, причем $\Omega_n \cap \Omega_m = \varnothing$ при $n \neq m$,
то $P_\Omega = \operatorname{s-lim}\limits_{N \to \infty} \sum\limits_{n=1}^{N} P_{\Omega_n}$;
(d) $P_{\Omega_1} P_{\Omega_2} = P_{\Omega_1 \cap \Omega_2}$.

Такое семейство называется **проекторнозначной мерой.** Это определение обобщает понятие ограниченной проекторнозначной меры, введенное в гл. VII, поскольку мы требуем только, чтобы $P_{(-\infty,\, \infty)} = I$, вместо $P_{(-a,\, a)} = I$ для некоторого a. Для $\varphi \in \mathcal{H}$ среднее $(\varphi, P_\Omega \varphi)$ — корректно определенная борелева мера на $\mathbb{R}$, которую мы, так же как в гл. VII, обозначим через $d(\varphi, P_\lambda \varphi)$. Комплексная мера $d(\varphi, P_\lambda \psi)$ определяется поляризационным тождеством. Итак, для заданной ограниченной борелевой функции g мы можем определить $g(A)$ условием

$$(\varphi, g(A)\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\, d(\varphi, P_\lambda \varphi). \qquad \text{(VIII.4)}$$

Нетрудно показать, что это отображение $g \mapsto g(A)$ обладает свойствами (a) — (d) теоремы VIII.5, так что $g(A)$, определенное по (VIII.4), совпадает с $g(A)$, данным в теореме VIII.4. Предположим теперь, что g — неограниченная комплекснозначная борелева функция, и пусть

$$D_g = \left\{ \varphi \,\Big|\, \int_{-\infty}^{\infty} |g(\lambda)|^2\, d(\varphi, P_\lambda \varphi) < \infty \right\}. \qquad \text{(VIII.5)}$$

Тогда область D_g плотна в $\mathscr{H}$ и оператор $g(A)$ определен на D_g формулой

$$(\varphi,\ g(A)\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,d(\varphi,\ P_\lambda\varphi).$$

Как и в гл. VII, мы будем использовать символическую запись

$$g(A)=\int g(\lambda)\,dP_\lambda.$$

В частности, если $\varphi,\ \psi\in D(A)$, то

$$(\varphi,\ A\psi)=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,d(\varphi,\ P_\lambda\psi).$$

Если g вещественнозначна, то оператор $g(A)$ самосопряжен на D_g. Наши построения резюмирует

Теорема VIII.6 (спектральная теорема в терминах проекторнозначных мер). Существует взаимно однозначное соответствие между самосопряженными операторами A и проекторнозначными мерами $\{P_\Omega\}$ на $\mathscr{H}$, задаваемое равенством

$$A=\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\,dP_\lambda.$$

Если $g(\cdot)$—вещественнозначная борелева функция на $\mathbb{R}$, то оператор

$$g(A)=\int_{-\infty}^{\infty} g(\lambda)\,dP_\lambda,$$

определенный на D_g [см. (VIII.5)], самосопряжен. Если функция g ограничена, то $g(A)$ совпадает с $\hat{\phi}(g)$ теоремы VIII.5.

В заключение сделаем несколько замечаний. Во-первых, формула Стоуна, данная в теореме VII.13, связывает резольвенту и проекторнозначную меру любого самосопряженного оператора. Доказательство проходит так же, как и в ограниченном случае.

Спектр неограниченного самосопряженного оператора—неограниченное подмножество вещественной оси. Можно определить дискретный и существенный спектры, и они по-прежнему характеризуются теоремами VII.9, VII.10 и VII.11. Теорема VII.12 (критерий Вейля) также выполняется, если потребовать, чтобы векторы $\{\psi_n\}$ лежали в области определения A.

Наконец, отметим, что пространство с мерой в теореме VIII.4 всегда можно выбрать так, чтобы было применимо предложение 2.

Предложение 3. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда пространство с мерой $\langle M, \mu\rangle$ и функция f из теоремы VIII.4 могут быть выбраны так, что $f \in L^p(M, d\mu)$ для всех p, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Из теоремы VIII.4 мы знаем, что A унитарно эквивалентен T_f на некотором пространстве с мерой $\langle M, \nu\rangle$ с $\nu(M) < \infty$. Пусть μ — мера, заданная соотношением

$$d\mu = e^{-f^2} d\nu.$$

Тогда T_f на $L^2(M, d\mu)$ унитарно эквивалентен T_f на $L^2(M, d\nu)$, и эта унитарная связь осуществляется оператором V: $L^2(M, d\nu) \to L^2(M, d\mu)$, который задается равенством $Vg(m) = (e^{+f^2/2}g)(m)$. Более того, $f \in L^p(M, d\mu)$ для любого $1 \leqslant p < \infty$. ∎

VIII.4. Теорема Стоуна

В этом разделе доказывается теорема Стоуна, которая, подобно спектральной теореме, играет важную роль в квантовой механике. Предположим, что A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$. Если A ограничен, то экспоненту от A можно определить при помощи ряда

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n A^n}{n!},$$

поскольку он сходится по норме. Если оператор A самосопряжен, но неограничен, то использовать степенной ряд непосредственно нельзя, однако для определения e^{itA} в этом случае можно использовать развитое в предыдущем разделе функциональное исчисление.

Теорема VIII.7. Пусть A — самосопряженный оператор; положим $U(t) = e^{itA}$. Тогда

(a) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен и $U(t+s) = U(t)U(s)$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(b) если $\varphi \in \mathcal{H}$ и $t \to t_0$, то $U(t)\varphi \to U(t_0)\varphi$;

(c) для $\psi \in D(A)$ имеем: $\dfrac{U(t)\psi - \psi}{t} \to iA\psi$ при $t \to 0$;

(d) если $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{U(t)\psi - \psi}{t}$ существует, то $\psi \in D(A)$.

Доказательство. (a) немедленно следует из функционального исчисления и соответствующих утверждений для комплексно-значной функции $e^{it\lambda}$. Для доказательства (b) отметим, что

$$\| e^{itA}\varphi - \varphi \|^2 = \int_{\mathbb{R}} | e^{it\lambda} - 1 |^2 d(P_\lambda \varphi, \varphi).$$