Предложение 3. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда пространство с мерой $\langle M, \mu \rangle$ и функция f из теоремы VIII.4 могут быть выбраны так, что $f \in L^p(M, d\mu)$ для всех p, удовлетворяющих неравенству $1 \leqslant p < \infty$.

Доказательство. Из теоремы VIII.4 мы знаем, что A унитарно эквивалентен T_f на некотором пространстве с мерой $\langle M, \nu \rangle$ с $\nu(M) < \infty$. Пусть μ — мера, заданная соотношением

$$d\mu = e^{-f^2} d\nu.$$

Тогда T_f на $L^2(M, d\mu)$ унитарно эквивалентен T_f на $L^2(M, d\nu)$, и эта унитарная связь осуществляется оператором V: $L^2(M, d\nu) \longrightarrow L^2(M, d\mu)$, который задается равенством $Vg(m) = (e^{+f^2/2}g)(m)$. Более того, $f \in L^p(M, d\mu)$ для любого $1 \leqslant p < \infty$. ∎

VIII.4. Теорема Стоуна

В этом разделе доказывается теорема Стоуна, которая, подобно спектральной теореме, играет важную роль в квантовой механике. Предположим, что A — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$. Если A ограничен, то экспоненту от A можно определить при помощи ряда

$$e^{itA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n A^n}{n!},$$

поскольку он сходится по норме. Если оператор A самосопряжен, но неограничен, то использовать степенной ряд непосредственно нельзя, однако для определения e^{itA} в этом случае можно использовать развитое в предыдущем разделе функциональное исчисление.

Теорема VIII.7. Пусть A — самосопряженный оператор; положим $U(t) = e^{itA}$. Тогда

(a) для любого $t \in \mathbb{R}$ оператор $U(t)$ унитарен и $U(t+s) = U(t)U(s)$ при всех $s, t \in \mathbb{R}$;

(b) если $\varphi \in \mathscr{H}$ и $t \longrightarrow t_0$, то $U(t)\varphi \longrightarrow U(t_0)\varphi$;

(c) для $\psi \in D(A)$ имеем: $\dfrac{U(t)\psi - \psi}{t} \longrightarrow iA\psi$ при $t \longrightarrow 0$;

(d) если $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{U(t)\psi - \psi}{t}$ существует, то $\psi \in D(A)$.

Доказательство. (a) немедленно следует из функционального исчисления и соответствующих утверждений для комплекснозначной функции $e^{it\lambda}$. Для доказательства (b) отметим, что

$$\| e^{itA}\varphi - \varphi \|^2 = \int_{\mathbb{R}} | e^{it\lambda} - 1 |^2 \, d(P_\lambda \varphi, \varphi).$$

Поскольку $|e^{it\lambda}-1|^2$ мажорируется интегрируемой функцией $g(\lambda)=2$ и поскольку

$$|e^{it\lambda}-1|^2 \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0 \text{ для любого } \lambda\in\mathbb{R},$$

мы заключаем, что $\|U(t)\varphi-\varphi\|^2\to 0$ по теореме Лебега о мажорированной сходимости. Итак, $t\mapsto U(t)$ сильно непрерывно в $t=0$, откуда в силу группового свойства вытекает сильная непрерывность этого отображения всюду. Доказательство (c), использующее снова теорему о мажорированной сходимости и оценку $|e^{ix}-1|\leqslant|x|$, мы оставляем читателю (задача 11). Чтобы доказать (d), положим

$$D(B)=\left\{\psi \,\middle|\, \lim_{t\to 0}\frac{U(t)\psi-\psi}{t} \text{ существует}\right\},$$

и пусть $iB\psi=\lim\limits_{t\to 0}[U(t)\psi-\psi]/t$. Простые вычисления показывают, что B — симметрический оператор. Согласно (c), $B\supset A$, поэтому $B=A$. ∎

Определение. Операторнозначная функция $U(t)$, удовлетворяющая (a) и (b), называется **сильно непрерывной однопараметрической унитарной группой.**

Следующая теорема гласит, что каждая сильно непрерывная унитарная группа есть семейство экспонент некоторого самосопряженного оператора.

Теорема VIII.8 (теорема Стоуна). Пусть $U(t)$ — сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда существует самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$, такой, что $U(t)=e^{itA}$.

Доказательство. Пункт (d) теоремы VIII.7 наводит на мысль о том, что A можно получить дифференцированием $U(t)$ при $t=0$. Мы покажем, что это можно сделать на плотной области, состоящей из особенно хороших векторов, а затем, используя основной критерий самосопряженности, покажем, что предельный оператор в существенном самосопряжен. И наконец, мы докажем, что экспонента этого предельного оператора даст $U(t)$.

Пусть $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$; для каждого $\varphi\in\mathcal{H}$ введем

$$\varphi_f=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,U(t)\,\varphi\,dt.$$

Так как группа $U(t)$ сильно непрерывна, то интеграл можно рассматривать как риманов. Пусть D — множество конечных линейных комбинаций всех таких φ_f для $\varphi\in\mathcal{H}$ и $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Если $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица, введенная в § VIII.1, то

$$\| \varphi_{j_\varepsilon} - \varphi \| = \left\| \int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(t)\,(U(t)\varphi - \varphi)\,dt \right\| \leqslant$$
$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} j_\varepsilon(t)\,dt \right) \sup_{t\in[-\varepsilon,\,\varepsilon]} \| U(t)\varphi - \varphi \|.$$

Поскольку $U(t)$ сильно непрерывна, D плотна в $\mathscr{H}$. Мы использовали здесь неравенство $\left\| \int h(t)\,dt \right\| \leqslant \int \| h(t) \|\,dt$ для непрерывных функций на вещественной прямой со значениями в банаховом пространстве (это неравенство можно доказать с помощью частичных сумм точно так же, как и в вещественнозначном случае).

При $\varphi_f \in D$ получим

$$\left(\frac{U(s) - I}{s} \right) \varphi_f = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left(\frac{U(s+t) - U(t)}{s} \right) \varphi\,dt =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\tau - s) - f(\tau)}{s}\, U(\tau)\varphi\,d\tau \longrightarrow$$
$$\longrightarrow -\int f'(\tau)\, U(\tau)\varphi\,d\tau =$$
$$= \varphi_{-f'},$$

так как $[f(\tau - s) - f(\tau)]/s$ равномерно сходится к $-f'(\tau)$. Для $\varphi_f \in D$ положим $A\varphi_f = i^{-1}\varphi_{-f'}$. Отметим, что $U(t)\colon D \to D$, $A\colon D \to D$ и $U(t)A\varphi_f = AU(t)\varphi_f$ при $\varphi_f \in D$. Более того, если $\varphi_f,\ \varphi_g \in D$, то

$$(A\varphi_f,\ \varphi_g) = \lim_{s\to 0} \left(\left(\frac{U(s) - I}{is} \right) \varphi_f,\ \varphi_g \right) =$$
$$= \lim_{s\to 0} \left(\varphi_f,\ \left(\frac{I - U(-s)}{is} \right) \varphi_g \right) =$$
$$= (\varphi_f,\ i^{-1}\varphi_{-g'}) =$$
$$= (\varphi_f,\ A\varphi_g),$$

так что A — симметрический.

Теперь покажем, что A в существенном самосопряжен. Предположим, что имеется такой $u \in D(A^*)$, что $A^*u = iu$. Тогда для любого $\varphi \in D(A) = D$:

$$\frac{d}{dt}(U(t)\varphi,\ u) = (iAU(t)\varphi,\ u) =$$
$$= -i\,(U(t)\varphi,\ A^*u) =$$
$$= -i\,(U(t)\varphi,\ iu) =$$
$$= (U(t)\varphi,\ u).$$

Итак, комплекснозначная функция $f(t)=(U(t)\varphi, u)$ удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению $f'=f$, и поэтому $f(t)=f(0)e^t$. Поскольку $U(t)$ имеет единичную норму, модуль $|f(t)|$ ограничен, откуда следует, что $f(0)=(\varphi, u)=0$. Так как D плотна, то $u=0$. Аналогичное доказательство показывает, что и $A^*u=-iu$ не имеет ненулевых решений. Отсюда, в силу следствия из теоремы VIII.3, A в существенном самосопряжен на D.

Пусть $V(t)=e^{it\bar{A}}$. Остается показать, что $U(t)=V(t)$. Пусть $\varphi\in D$. Так как $\varphi\in D(\bar{A})$, то, в силу пункта (c) теоремы VIII.7, $V(t)\varphi\in D(\bar{A})$ и $V'(t)\varphi=-i\bar{A}V(t)\varphi$. Мы уже знаем, что $U(t)\varphi\in D\subset D(\bar{A})$ при всех t. Пусть $w(t)=U(t)\varphi-V(t)\varphi$. Тогда $w(t)$—сильно дифференцируемая векторнозначная функция и

$$w'(t)=iAU(t)\varphi-i\bar{A}V(t)\varphi=i\bar{A}w(t).$$

Таким образом,

$$\frac{d}{dt}\|w(t)\|^2=-i(\bar{A}w(t), w(t))+i(w(t), \bar{A}w(t))=0,$$

и так как $w(0)=0$, то $w(t)=0$ для всех t. Отсюда получаем равенство $U(t)\varphi=V(t)\varphi$ для всех $t\in\mathbb{R}$, $\varphi\in D$, а так как D плотна, то $U(t)=V(t)$. ∎

Определение. Если $U(t)$—сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа, то самосопряженный оператор A, такой, что $U(t)=e^{itA}$, называется **инфинитезимальным генератором** $U(t)$.

Предположим, что $U(t)$—*слабо* непрерывная однопараметрическая унитарная группа. Тогда

$$\|U(t)\varphi-\varphi\|^2=\|U(t)\varphi\|^2-(U(t)\varphi, \varphi)-(\varphi, U(t)\varphi)+\|\varphi\|^2\to$$
$$\to 2\|\varphi\|^2-2\|\varphi\|^2=0$$

при $t\to 0$. Итак, $U(t)$ в действительности *сильно* непрерывна. На самом деле для заключения о сильной непрерывности $U(t)$ достаточно доказать лишь слабую измеримость $U(t)$, т. е. что функция $(U(t)\varphi, \psi)$ измерима при любых φ и ψ. Этот замечательный результат, доказанный фон Нейманом, полезен в приложениях, поскольку $(U(t)\varphi, \psi)$ часто оказывается пределом последовательности непрерывных функций. Тогда функция $(U(t)\varphi, \psi)$ измерима, а группа $U(t)$ по теореме фон Неймана сильно непрерывна.

Теорема VIII.9 (фон Нейман). Пусть $U(t)$—однопараметрическая группа унитарных операторов на *сепарабельном* гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Предположим, что для всех $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ функция $(U(t)\psi, \varphi)$ измерима. Тогда $U(t)$ сильно непрерывна.

Доказательство. Пусть $\psi \in \mathscr{H}$. Тогда для всех $\varphi \in \mathscr{H}$ функция $(U(t)\psi, \varphi)$ ограничена и измерима, а отображение

$$\varphi \mapsto \int_0^a (U(t)\psi, \varphi)\,dt$$

— линейный функционал на $\mathscr{H}$, норма которого меньше или равна $a\|\psi\|$. В таком случае по лемме Рисса существует такой $\psi_a \in \mathscr{H}$, что

$$(\psi_a, \varphi) = \int_0^a (U(t)\psi, \varphi)\,dt.$$

Тогда

$$\begin{aligned}(U(b)\psi_a, \varphi) = (\psi_a, U(-b)\varphi) &= \\ &= \int_0^a (U(t)\psi, U(-b)\varphi)\,dt = \\ &= \int_0^a (U(t+b)\psi, \varphi)\,dt = \\ &= \int_b^{a+b} (U(t)\psi, \varphi)\,dt.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$|(U(b)\psi_a, \varphi) - (\psi_a, \varphi)| = \left|\int_0^b (U(t)\psi, \varphi)\,dt\right| + \left|\int_a^{a+b} (U(t)\psi, \varphi)\,dt\right| \leqslant \leqslant 2b\|\varphi\|\|\psi\|.$$

Поэтому

$$\lim_{b\to 0} (U(b)\psi_a, \varphi) = (\psi_a, \varphi),$$

так что $U(b)$ слабо и, следовательно, сильно непрерывна на множестве векторов вида $\{\psi_a \mid \psi \in \mathscr{H}\}$. Остается только показать, что это множество плотно, поскольку при помощи $\varepsilon/3$-приема тогда можно будет заключить, что $t \mapsto U(t)$ сильно непрерывно на $\mathscr{H}$. Предположим, что $\varphi \in \{\psi_a \mid \psi \in \mathscr{H}, a \in \mathbb{R}\}^\perp$, и пусть $\{\psi^{(n)}\}$ — ортонормированный базис в $\mathscr{H}$. Тогда для любого n

$$0 = (\psi_a^{(n)}, \varphi) = \int_0^a (U(t)\psi^{(n)}, \varphi)\,dt$$

при всех a, откуда $(U(t)\psi^{(n)}, \varphi)=0$ для всех t, кроме принадлежащих S_n—множеству нулевой меры. Выберем $t_0 \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$. Тогда $(U(t_0)\psi^{(n)}, \varphi)=0$ при всех n, откуда $\varphi=0$, в силу унитарности $U(t_0)$. ∎

Из доказательства самосопряженности в существенном в теореме VIII.8 непосредственно вытекает следующий критерий самосопряженности:

Теорема VIII.10. Предположим, что $U(t)$—сильно непрерывная однопараметрическая унитарная группа. Пусть D—плотная область, инвариантная относительно $U(t)$, на которой $U(t)$ сильно дифференцируема. Тогда произведение i^{-1} на сильную производную $U(t)$ при $t=0$ в существенном самосопряжено на D, а его замыкание—инфинитезимальный генератор $U(t)$.

Существует другая формулировка этой теоремы, достаточно важная, чтобы выделить ее в качестве самостоятельной теоремы:

Теорема VIII.11. Пусть A—самосопряженный оператор в $\mathscr{H}$ и D—плотное линейное множество, содержащееся в $D(A)$. Если e^{itA}: $D\to D$ при всех t, то D—существенная область A.

Наконец, справедливо следующее обобщение теоремы Стоуна.

Теорема VIII.12. Пусть $\mathbf{t}\to U(\mathbf{t})=U(t_1, \ldots, t_n)$—сильно непрерывное отображение $\mathbb{R}^n$ в множество унитарных операторов на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющее условиям $U(\mathbf{t}+\mathbf{s})=U(\mathbf{t})U(\mathbf{s})$ и $U(\mathbf{0})=I$. Пусть D—множество конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f=\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{t})U(\mathbf{t})\varphi\,dt, \quad \varphi\in\mathscr{H}, \quad f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Тогда D—область самосопряженности в существенном для каждого из генераторов A_j однопараметрических подгрупп $U(0, \ldots, t_j, \ldots, 0)$; при этом каждый A_j отображает D в себя и все A_j коммутируют, $j=1, \ldots, n$. Более того, существует проекторнозначная мера P_Ω на $\mathbb{R}^n$, такая, что для всех $\varphi, \psi\in\mathscr{H}$

$$(\varphi, U(\mathbf{t})\psi)=\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\lambda}}\,d(\varphi, P_{\boldsymbol{\lambda}}\psi).$$

Доказательство. Пусть A_j—инфинитезимальный генератор группы $U_j(t_j)=U(0, \ldots, t_j, \ldots, 0)$. Построение, использованное при доказательстве теоремы VIII.8, показывает, что $D\subset D(A_j)$, A_j: $D\to D$ и $U_j(t_j)$: $D\to D$. Из теоремы VIII.11 видно, что A_j в существенном самосопряжен на D. В силу соотношения $U(\mathbf{t}+\mathbf{s})=U(\mathbf{t})U(\mathbf{s})$, $U_j(t_j)$ коммутирует с $U_i(t_i)$ при всех t_i,

$t_j \in \mathbb{R}$. Поэтому, как вытекает из теоремы VIII.13, A_i и A_j коммутируют в смысле определения из следующего раздела, т. е. коммутируют их спектральные проекторы.

Пусть P^j_Ω—проекторнозначная мера на $\mathbb{R}$, соответствующая A_j. Определим проекторнозначную меру P_Ω на $\mathbb{R}^n$, задав ее сначала на прямоугольниках $r=(a_1, b_1)\times \ldots \times(a_n, b_n)$ формулой $P_r = P^1_{(a_1, b_1)} P^2_{(a_2, b_2)} \ldots P^n_{(a_n, b_n)}$, а затем считая P_Ω единственным расширением на наименьшую σ-алгебру, содержащую прямоугольники, а именно на борелевы множества. Отметим, что по теореме VIII.13 операторы $P^j_{\Omega_j}$ коммутируют, поскольку коммутируют группы U_j. Для любых $\varphi, \psi \in \mathcal{H}$ величина $(\varphi, P_\Omega\psi)$ является комплекснозначной мерой с конечной массой. Эту меру мы обозначим через $d(\varphi, P_\lambda\psi)$. Применяя теорему Фубини, легко получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}\cdot\boldsymbol{\lambda}}\, d(\varphi, P_\lambda\psi) = (\varphi, U_1(t_1) \ldots U_n(t_n)\psi) = (\varphi, U(\mathbf{t})\psi). \blacksquare$$

VIII.5. Опасности, таящиеся в формальных манипуляциях. Пример Нельсона

Теоремы, доказанные в последних двух разделах, могут создать у читателя впечатление, что неограниченные операторы очень похожи на ограниченные, и нужно лишь немного заботиться об областях определения. Но, во-первых, иногда трудно указать точную область определения самосопряженного оператора и не всегда достаточно проверить утверждения на существенной области. А, во-вторых, формальные вычисления могут вводить в заблуждение. Эти соображения мы проиллюстрируем на проблеме коммутативности и на одном удивительном примере Нельсона; тогда будет понятно, как трудно иметь дело с неограниченными операторами.

Предположим, что A и B—два неограниченных самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Мы хотели бы придать смысл утверждению: «A и B коммутируют». Это нельзя сделать непосредственно, поскольку разность $AB-BA$ может не иметь смысла ни на одном векторе из $\mathcal{H}$. Например, может оказаться, что $(\mathrm{Ran}\, A)\cap D(B)=\{0\}$, и тогда BA не имеет смысла. Это наводит на мысль найти прежде всего эквивалентную формулировку свойства коммутативности ограниченных самосопряженных операторов. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов A и B показывает, что для них $AB-BA=0$ тогда и только тогда, когда коммутируют