$t_j \in \mathbb{R}$. Поэтому, как вытекает из теоремы VIII.13, A_i и A_j коммутируют в смысле определения из следующего раздела, т. е. коммутируют их спектральные проекторы.

Пусть P^j_Ω — проекторнозначная мера на $\mathbb{R}$, соответствующая A_j. Определим проекторнозначную меру P_Ω на $\mathbb{R}^n$, задав ее сначала на прямоугольниках $r=(a_1, b_1)\times \ldots \times(a_n, b_n)$ формулой $P_r = P^1_{(a_1, b_1)} P^2_{(a_2, b_2)} \ldots P^n_{(a_n, b_n)}$, а затем считая P_Ω единственным расширением на наименьшую σ-алгебру, содержащую прямоугольники, а именно на борелевы множества. Отметим, что по теореме VIII.13 операторы $P^j_{\Omega_j}$ коммутируют, поскольку коммутируют группы U_j. Для любых φ, $\psi \in \mathcal{H}$ величина $(\varphi, P_\Omega\psi)$ является комплекснозначной мерой с конечной массой. Эту меру мы обозначим через $d(\varphi, P_\lambda\psi)$. Применяя теорему Фубини, легко получаем, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{it\cdot\lambda}\, d(\varphi, P_\lambda\psi) = (\varphi, U_1(t_1) \ldots U_n(t_n)\psi) = (\varphi, U(\mathbf{t})\psi). \blacksquare$$

VIII.5. Опасности, таящиеся в формальных манипуляциях. Пример Нельсона

Теоремы, доказанные в последних двух разделах, могут создать у читателя впечатление, что неограниченные операторы очень похожи на ограниченные, и нужно лишь немного заботиться об областях определения. Но, во-первых, иногда трудно указать точную область определения самосопряженного оператора и не всегда достаточно проверить утверждения на существенной области. А, во-вторых, формальные вычисления могут вводить в заблуждение. Эти соображения мы проиллюстрируем на проблеме коммутативности и на одном удивительном примере Нельсона; тогда будет понятно, как трудно иметь дело с неограниченными операторами.

Предположим, что A и B — два неограниченных самосопряженных оператора в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Мы хотели бы придать смысл утверждению: «A и B коммутируют». Это нельзя сделать непосредственно, поскольку разность $AB-BA$ может не иметь смысла ни на одном векторе из $\mathcal{H}$. Например, может оказаться, что $(\mathrm{Ran}\, A)\cap D(B)=\{0\}$, и тогда BA не имеет смысла. Это наводит на мысль найти прежде всего эквивалентную формулировку свойства коммутативности ограниченных самосопряженных операторов. Спектральная теорема для ограниченных самосопряженных операторов A и B показывает, что для них $AB-BA=0$ тогда и только тогда, когда коммутируют все их проекторы $\{P^A_\Omega\}$ и $\{P^B_\Omega\}$. Примем это в качестве определения в неограниченном случае.

Определение. Два (возможно, неограниченных) самосопряженных оператора A и B называются **коммутирующими**, если коммутируют все проекторы соответствующих им проекторнозначных мер.

Спектральная теорема показывает, что если A и B коммутируют, то коммутируют и все ограниченные борелевы функции от A и B. В частности, коммутируют резольвенты $R_\lambda(A)$ и $R_\mu(B)$ и унитарные группы e^{itA} и e^{isB}. Справедливо и обратное утверждение, и, значит, данное выше определение коммутативности разумно.

Теорема VIII.13. Пусть A и B — самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Тогда следующие три утверждения равносильны:

(a) A и B коммутируют;

(b) если $\operatorname{Im}\lambda$ и $\operatorname{Im}\mu$ не равны нулю, то $R_\lambda(A)R_\mu(B) = R_\mu(B)R_\lambda(A)$;

(c) $e^{itA}e^{isB} = e^{isB}e^{itA}$ для всех $s,\ t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Тот факт, что (a) влечет за собой (b) и (c), следует из функционального исчисления. Тот факт, что (b) влечет за собой (a), легко следует из формулы, выражающей спектральные проекторы операторов A и B как сильные пределы резольвент (формула Стоуна), и равенства

$$\operatorname*{s-lim}_{\varepsilon\downarrow 0} i\varepsilon R_{a+i\varepsilon}(A) = P^A_{\{a\}}.$$

Для доказательства того, что (c) влечет за собой (a), используем некоторые простые свойства преобразования Фурье, доказываемые в § IX.1. Пусть $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Тогда по теореме Фубини

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)(e^{itA}\varphi,\ \psi)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\lambda}\,d(P^A_\lambda\varphi,\ \psi)\right)dt = \\ &= \sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\lambda)\,d(P^A_\lambda\varphi,\ \psi) = \\ &= \sqrt{2\pi}\,(\varphi,\ \hat{f}(A)\psi).\end{aligned}$$

Итак, используя (c) и еще раз теорему Фубини, имеем

$$\begin{aligned}(\varphi,\ \hat{f}(A)\,\hat{g}(B)\psi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,g(s)\,(\varphi,\ e^{-itA}e^{-isB}\psi)\,ds\,dt = \\ &= (\varphi,\ \hat{g}(B)\,\hat{f}(A)\psi),\end{aligned}$$

так что $\hat{f}(A)\hat{g}(B)-\hat{g}(B)\hat{f}(A)=0$ для всех $f, g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Так как преобразование Фурье отображает $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, то $f(A)g(B)=g(B)f(A)$ при любых $f, g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Но характеристическая функция $\chi_{(a,b)}$ может быть построена как поточечный предел последовательности f_n равномерно ограниченных функций из $\mathcal{S}$. В силу функционального исчисления,

$$f_n(A)\xrightarrow{s}P^A_{(a,b)}.$$

Аналогично находим равномерно ограниченные $g_n\in\mathcal{S}$, сходящиеся поточечно к $\chi_{(c,d)}$ так, что

$$g_n(B)\xrightarrow{s}P^B_{(c,d)}.$$

Поскольку f_n и g_n равномерно ограничены и

$$f_n(A)g_n(B)=g_n(B)f_n(A)$$

при любом n, мы заключаем, что $P^A_{(a,b)}$ и $P^B_{(c,d)}$ коммутируют откуда следует (а). ∎

Хотя, как показывает эта теорема, данное определение коммутативности разумно, с ним не всегда легко иметь дело. На практике A и B обычно заданы на множествах $D_0(A)$ и $D_0(B)$ самосопряженности в существенном, и может оказаться, что построить спектральные проекторы, резольвенты или группы, соответствующие $\bar{A}$ и $\bar{B}$, очень трудно. Поэтому хотелось бы иметь критерий коммутативности в терминах самих операторов. В задаче 13 читателю предлагается найти непересекающиеся области самосопряженности в существенном для операторов x и x^2 в $L^2(\mathbb{R})$. Это означает, что подобный критерий коммутативности не может давать необходимое условие, но при некоторых ограничениях можно получить достаточные условия. Вот две догадки, которые кажутся разумными, но которые *неверны*:

1. Пусть D — плотное подпространство в $\mathcal{H}$, содержащееся в областях определения A и B. Предположим далее, что $A: D\to D$ и $B: D\to D$. Тогда, если $AB\varphi-BA\varphi=0$ для любого $\varphi\in D$, то A и B коммутируют (*НЕВЕРНО!*).

2. Пусть D — плотная область самосопряженности в существенном для A и B. Предположим также, что $A: D\to D$ и $B: D\to D$. Тогда, если $AB\varphi-BA\varphi=0$ для всех $\varphi\in D$, то A коммутирует с B (*НЕВЕРНО!*).

Оба эти утверждения *неверны*, их посылки *недостаточны*, чтобы гарантировать коммутативность. Это удивительно в силу целого ряда причин. Во-первых, условия кажутся разумными. Во-вторых, D в условии (2) по предположению является областью самосопряженности в существенном как для A, так и для B, поэтому действие A и B на D должно было бы давать достаточно информации для выяснения вопроса о коммутативности A и B. Наконец, формально

$$e^{itA} \approx I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(itA)^n}{n!}, \qquad e^{isB} \approx I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(isB)^n}{n!}. \tag{VIII.6}$$

Поскольку из условий (1) и (2) следует, что $A^nB^m\varphi - B^mA^n\varphi = 0$ для любых $\varphi \in D$, можно ожидать, что e^{itA} и e^{isB} коммутируют при всех s и t. По теореме VIII.13 отсюда вытекало бы, что коммутируют A и B. Недостаток этой аргументации состоит в том, что выражения (VIII.6) не более чем формальны, и, в силу неограниченности A и B, могут не иметь смысла ни на одном векторе из D. Конечные суммы имеют смысл на D и

$$\left(I + \sum_{n=1}^{N} \frac{(itA)^n}{n!}\right)\left(I + \sum_{m=1}^{M} \frac{(isB)^m}{m!}\right)\varphi = \left(I + \sum_{m=1}^{M} \frac{(isB)^m}{m!}\right)\left(I + \sum_{n=1}^{N} \frac{(itA)^n}{n!}\right)\varphi,$$

но отсюда нельзя заключить, что e^{itA} и e^{isB} коммутируют. Следующий пример принадлежит Нельсону.

Пример 1. Предположим, что M — риманова поверхность функции $\sqrt{z}$ и $\mathcal{H} = L^2(M)$ с лебеговой мерой (локально). Пусть $A = -i\partial/\partial x$ и $B = -i\partial/\partial y$ на области определения D, состоящей из всех бесконечно дифференцируемых функций с компактными носителями, не содержащими нуля. Тогда

(a) A и B в существенном самосопряженны на D;

(b) A: $D \to D$, B: $D \to D$;

(c) $AB\varphi = BA\varphi$ для $\varphi \in D$;

(d) $e^{it\bar{A}}$ и $e^{is\bar{B}}$ не коммутируют.

Доказательства (b) и (c) очевидны. Для доказательства (a) отметим сначала, что интегрированием по частям можно убедиться в симметричности A и B. Пусть $D_x \subset D$ — множество функций из D, носители которых не содержат оси x ни на одном из листов. Оно также плотно в $L^2(M)$. На D_x определим $(U(t)\varphi)(x, y) = \varphi(x+t, y)$. Тогда $U(t)$ — сохраняющее норму отображение с плотной областью значений, поэтому его можно продолжить до унитарного оператора на $L^2(M)$. В силу сильной непрерывности $U(t)$ на D_x, оно сильно непрерывно и на $L^2(M)$. Далее, преобразование $U(t)$ сильно дифференцируемо на D_x, и его сильная производная, умноженная на i^{-1}, равна A. Значит, по теореме VIII.10 A в существенном самосопряжен на D_x, а следовательно, и на D (задача 14), а его замыкание порождает $U(t)$. Аналогично доказывается, что замыкание B — это инфинитезимальный генератор трансляций в направлении оси y, определенный как продолжение из области D_y. Тем самым доказано (a).

Для доказательства (d) выберем бесконечно дифференцируемую функцию φ с носителем, содержащимся в некотором малом круге с центром в точке $(-1/2, -1/2)$ на первом листе. Тогда

$$U(1)V(1)\varphi \neq V(1)U(1)\varphi,$$

поскольку функции, стоящие в разных частях этого неравенства, имеют носители около $(1/2, 1/2)$, но на разных листах. ∎

Пример 2 (канонические коммутационные соотношения). Говорят, что пара P, Q самосопряженных операторов «удовлетворяет» **каноническим коммутационным соотношениям**, если

$$PQ - QP = -iI. \tag{VIII.7}$$

Операторы P и Q не могут оба быть ограниченными, ибо если бы это было так, то из соотношения $PQ^n - Q^nP = -inQ^{n-1}$ [вытекающего непосредственно из (VIII.7)] следовало бы, что

$$n\|Q\|^{n-1} = n\|Q^{n-1}\| \leqslant 2\|P\|\|Q\|^n,$$

т. е. $2\|P\|\|Q\| \geqslant n$ при всех n, а это противоречит ограниченности. Итак, или P, или Q, или оба эти оператора одновременно должны быть неограниченными, поэтому нельзя обсуждать (VIII.7), не заботясь об областях определения. Стандартная реализация, или «представление», используемое в квантовой механике, — это **представление Шредингера**, при котором $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, а P и Q — замыкания операторов дифференцирования $i^{-1}d/dx$ и умножения на x, заданных на $\mathscr{S}(\mathbb{R})$. При этом $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ — область самосопряженности в существенном для $i^{-1}d/dx$ и x,

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}), \quad x\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}) \to \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

и для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ имеем

$$\frac{1}{i}\frac{d}{dx}(x\varphi) - x\left(\frac{1}{i}\frac{d}{dx}\varphi\right) = -i\varphi.$$

Вопрос в следующем: в каком смысле шредингерово представление — «единственно возможное» представление соотношения (VIII.7). Один из способов исследования (VIII.7) состоит в переходе к унитарным группам. Если $U(t) = e^{itP}$ и $V(s) = e^{isQ}$, то *формальные* вычисления, использующие (VIII.7) и формальные разложения в степенные ряды для e^{itP} и e^{isQ}, дают

$$U(t)V(s) = e^{its}V(s)U(t). \tag{VIII.8}$$

Читатель не должен удивляться тому, что две проблемы: разрешение соотношения (VIII.7) и разрешение соотношения (VIII.8), связанные формальным вычислением, — *не эквивалентны*. Рассмотрим сначала более легкую проблему (VIII.8), в которой приходится иметь дело лишь с ограниченными операторами. Если две непрерывные однопараметрические группы $U(t)$ и $V(s)$ удовлетворяют соотношениям (VIII.8), то говорят, что они удовлетворяют **соотношениям Вейля**. Читатель легко может убедиться, что в шредингеровом представлении группы e^{itP} и e^{isQ} *действительно* удовлетворяют соотношениям Вейля. Оператор e^{itP} есть не что иное, как левый сдвиг на t, а e^{isQ} — умножение на e^{isx}. Следующая теорема утверждает, что с точностью до кратности и унитарной эквивалентности соотношения Вейля имеют единственное решение (доказательство см. в гл. XIV или в задаче 30 гл. X).

Теорема VIII.14 (фон Нейман). Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — однопараметрические непрерывные унитарные группы на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$, удовлетворяющие соотношениям Вейля. Тогда существуют такие замкнутые подпространства $\mathscr{H}_l$, что

(a) $\mathscr{H}=\bigoplus\limits_{l=1}^{N}\mathscr{H}_l$ (N — целое положительное или ∞);

(b) $U(t)$: $\mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$, $V(s)$: $\mathscr{H}_l \to \mathscr{H}_l$ для всех s, $t \in \mathbb{R}$;

(c) для каждого l существует такой унитарный оператор T_l: $\mathscr{H}_l \to L^2(\mathbb{R})$, что $T_lU(t)T_l^{-1}$ — левый сдвиг на t, а $T_lV(s)T_l^{-1}$ — умножение на e^{isx}.

Следствие. Пусть $U(t)$ и $V(s)$ — непрерывные однопараметрические унитарные группы, удовлетворяющие соотношениям Вейля на сепарабельном гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Пусть P — генератор $U(t)$, Q — генератор $V(s)$. Тогда существует плотная область $D \subset \mathscr{H}$, такая, что

(a) P: $D \to D$, Q: $D \to D$;

(b) $PQ\varphi - QP\varphi = -i\varphi$ для всех $\varphi \in D$;

(c) P и Q в существенном самосопряженны на D.

Это следствие (простое доказательство которого предлагается в качестве задачи 36) показывает, что любое решение соотношений Вейля обладает инфинитезимальными генераторами, удовлетворяющими каноническим коммутационным соотношениям в смысле выполнения (a), (b) и (c). Обратное утверждение не верно, как показывает следующее небольшое видоизменение примера Нельсона. Пусть $\mathscr{H} = L^2(M)$, как в примере 1,

$$P=\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}, \quad Q=x+\frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial y}$$

на области определения D, введенной там же. Операторы P и Q обладают свойствами (a), (b) и (c). Доказательство самосопряженности подобно доказательству в примере 1. Но порождаемые ими группы не удовлетворяют соотношениям Вейля.

В этом разделе мы хотели продемонстрировать ошибочные результаты, к которым можно прийти путем формального обращения с формальным разложением e^{itA} в степенной ряд. Отсюда, однако, не следует, что при неограниченном A формальный ряд для e^{itA} ничего не дает. Действительно, предположим, что A — неограниченный самосопряженный оператор, а P_Ω — соответствующая проекторнозначная мера. Тогда множество D_c векторов вида $P_{[-M,\, M]}\varphi$, где $\varphi \in \mathscr{H}$, а M — произвольное, но конечное число, плотно и содержится в $D(A^n)$ при всех n, а оператор A в существенном самосопряжен на D_c. Более того, если $\psi = P_{[-M,\, M]}\varphi$, то $\|A^n\psi\| \leqslant M^n \|\psi\|$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\psi\|}{n!} < \infty \tag{VIII.9}$$

для всех t. Поэтому, если $\psi \in D_c$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (it)^n A^n\psi/n!$ сходится. Векторы $\psi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$, удовлетворяющие (VIII.9) при некотором $t > 0$, называются **аналитическими векторами** оператора A. На таких векторах степенной ряд для $e^{itA}\psi$ имеет смысл и сходится к $e^{itA}\psi$ при достаточно малых t. Мы вернемся к аналитическим векторам в § X.4, где доказывается теорема Нельсона о том, что если симметрический оператор A имеет плотное множество аналитических векторов в своей области определения D, то он в существенном самосопряжен.

VIII.6. Квадратичные формы

Одно из следствий леммы Рисса состоит в том, что существует взаимно однозначное соответствие между ограниченными квадратичными формами и ограниченными операторами: любое полуторалинейное отображение $q: \mathscr{H} \times \mathscr{H} \to \mathbf{C}$, удовлетворяющее условию $|q(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\| \|\psi\|$, имеет вид $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для некоторого ограниченного оператора A. Как и следовало ожидать, после отказа от условия ограниченности ситуация усложняется. В этом разделе мы вкратце рассмотрим связь между неограниченными формами и неограниченными операторами.

Определение. **Квадратичная форма** есть отображение $q: Q(q) \times Q(q) \to \mathbf{C}$, где $Q(q)$ — плотное линейное подмножество в $\mathscr{H}$,