на области определения D, введенной там же. Операторы P и Q обладают свойствами (a), (b) и (c). Доказательство самосопряженности подобно доказательству в примере 1. Но порождаемые ими группы не удовлетворяют соотношениям Вейля.

В этом разделе мы хотели продемонстрировать ошибочные результаты, к которым можно прийти путем формального обращения с формальным разложением e^{itA} в степенной ряд. Отсюда, однако, не следует, что при неограниченном A формальный ряд для e^{itA} ничего не дает. Действительно, предположим, что A — неограниченный самосопряженный оператор, а P_Ω — соответствующая проекторнозначная мера. Тогда множество D_c векторов вида $P_{[-M,\, M]}\varphi$, где $\varphi \in \mathcal{H}$, а M — произвольное, но конечное число, плотно и содержится в $D(A^n)$ при всех n, а оператор A в существенном самосопряжен на D_c. Более того, если $\psi = P_{[-M,\, M]}\varphi$, то $\|A^n\psi\| \leqslant M^n \|\psi\|$, так что

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n \|A^n\psi\|}{n!} < \infty \qquad \text{(VIII.9)}$$

для всех t. Поэтому, если $\psi \in D_c$, то ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (it)^n A^n\psi/n!$ сходится. Векторы $\psi \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} D(A^n)$, удовлетворяющие (VIII.9) при некотором $t > 0$, называются **аналитическими векторами** оператора A. На таких векторах степенной ряд для $e^{itA}\psi$ имеет смысл и сходится к $e^{itA}\psi$ при достаточно малых t. Мы вернемся к аналитическим векторам в § X.4, где доказывается теорема Нельсона о том, что если симметрический оператор A имеет плотное множество аналитических векторов в своей области определения D, то он в существенном самосопряжен.

VIII.6. Квадратичные формы

Одно из следствий леммы Рисса состоит в том, что существует взаимно однозначное соответствие между ограниченными квадратичными формами и ограниченными операторами: любое полуторалинейное отображение q: $\mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{C}$, удовлетворяющее условию $|q(\varphi, \psi)| \leqslant M \|\varphi\| \|\psi\|$, имеет вид $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$ для некоторого ограниченного оператора A. Как и следовало ожидать, после отказа от условия ограниченности ситуация усложняется. В этом разделе мы вкратце рассмотрим связь между неограниченными формами и неограниченными операторами.

Определение. **Квадратичная форма** есть отображение q: $Q(q) \times Q(q) \to \mathbb{C}$, где $Q(q)$ — плотное линейное подмножество в $\mathcal{H}$, называемое **областью определения формы**, такое, что $q(\cdot, \psi)$ сопряженно-линейно, а $q(\varphi, \cdot)$ линейно при $\varphi, \psi \in Q(q)$. Если $q(\varphi, \psi) = \overline{q(\psi, \varphi)}$, то мы называем форму q **симметрической**. Если $q(\varphi, \varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in Q(q)$, то q называется **положительной формой**, а если $q(\varphi, \varphi) \geqslant -M\|\varphi\|^2$ для некоторого M, то мы говорим, что форма q **полуограничена**.

Отметим, что на комплексном $\mathscr{H}$ полуограниченная форма q автоматически симметрична.

Пример 1. Пусть $\mathscr{H} = L^2(\mathbb{R})$, $Q(q) = C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $q(f, g) = \bar{f}(0)g(0)$. Тогда q — положительная квадратичная форма. Поскольку $q(f, g) = \delta(\bar{f}g)$, то можно *формально* записать $q(f, g) = (f, Ag)$, где A: $g \mapsto \delta(x)g(x)$. Так как умножение на $\delta(x)$ не является оператором, то q дает пример квадратичной формы, которой, по всей видимости, не соответствует никакой оператор.

Пример 2. Пусть A — самосопряженный оператор на $\mathscr{H}$. Перейдем к его спектральному представлению, так чтобы A стал оператором умножения на x в пространстве $\bigoplus_{n=1}^{N} L^2(\mathbb{R}, d\mu_n)$. Пусть

$$Q(q) = \left\{ \{\psi_n(x)\}_{n=1}^{N} \,\middle|\, \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|\psi_n(x)|^2 d\mu_n < \infty \right\}$$

и для всех $\psi, \varphi \in Q(q)$ положим

$$q(\varphi, \psi) = \sum_{n=1}^{N} \int_{-\infty}^{\infty} x\overline{\varphi_n(x)}\,\psi_n(x)\,d\mu_n.$$

Мы называем q **квадратичной формой, порожденной оператором** A, и пишем $Q(q) = Q(A)$; $Q(A)$ называется **областью определения формы, порожденной оператором** A. Для $\psi, \varphi \in Q(A)$ мы часто будем писать $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, хотя A определен не на всех $\psi \in Q(A)$. В некотором смысле $Q(A)$ — наибольшая область, на которой может быть определена форма q.

Чтобы исследовать глубокую связь между самосопряженностью и полуограниченностью квадратичных форм, необходимо распространить на формы понятие «замкнутости». Оператор A замкнут тогда и только тогда, когда замкнут его график, т. е. $D(A)$ полно относительно нормы $\|\psi\|_A = \|A\psi\| + \|\psi\|$ (задача 15). По аналогии введем

Определение. Пусть q — полуограниченная квадратичная форма, $q(\psi, \psi) \geqslant -M\|\psi\|^2$. Форма q называется **замкнутой**, если $Q(q)$ полно относительно нормы

$$\|\psi\|_{+1} = \sqrt{q(\psi, \psi) + (M+1)\|\psi\|^2}.$$

Если q замкнута и $D \subset Q(q)$ плотна в $Q(q)$ по норме $\|\cdot\|_{+1}$, то D называется **существенной областью формы** q.

Отметим, что $\|\psi\|_{+1}$ порождается внутренним произведением

$$(\psi, \varphi)_{+1} = q(\psi, \varphi) + (M+1)(\psi, \varphi).$$

Нетрудно видеть (задача 15), что q замкнута тогда и только тогда, когда из $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \varphi$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует: $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$. Этот критерий и теорема о мажорированной сходимости показывают, что форма q, порождаемая полуограниченным самосопряженным оператором (пример 2), замкнута. Более того, любая существенная область оператора A является существенной областью формы q (задача 16).

Пусть теперь $q(f, g) = \bar{f}(0)g(0)$, как в примере 1, и φ_n—функции из C_0^∞, показанные на рис. VIII.2. Тогда $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{H}} 0$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \to 0$, но $q(\varphi_n, \varphi_n) \to 1 \neq q(0, 0)$, что доказывает

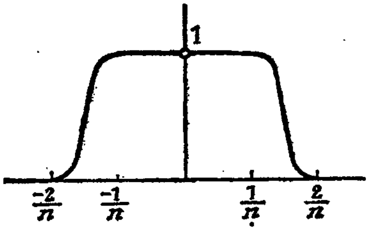

Рис. VIII.2. График φ_n.

отсутствие замкнутых расширений для q. Поэтому, хотя q положительна (и потому симметрична), не существует такого полуограниченного самосопряженного оператора A, что $q(f, g) = (f, Ag)$ для всех $f, g \in C_0^\infty$.

Важным свойством полуограниченных квадратичных форм является то, что *в отличие* от операторов они не могут быть замкнутыми и симметрическими, но не самосопряженными.

Теорема VIII.15. Всякая замкнутая полуограниченная квадратичная форма q порождается некоторым однозначно определенным самосопряженным оператором.

Доказательство. Не теряя общности, можно предположить, что q положительна. Тогда, так как q замкнута и симметрична, то $Q(q)$—гильбертово пространство (обозначим его через $\mathcal{H}_{+1}$) с внутренним произведением

$$(\varphi, \psi)_{+1} = q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi).$$

Обозначим через $\mathcal{H}_{-1}$ пространство ограниченных сопряженно-линейных функционалов на $\mathcal{H}_{+1}$. Пусть j: $\psi \mapsto (\cdot, \psi)$ — линейное вложение $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}_{-1}$. Тогда $j(\psi)$ ограничено, так как

$$|[j(\psi)](\varphi)| \leqslant \|\varphi\| \|\psi\| \leqslant \|\varphi\|_{+1} \|\psi\|.$$

Поскольку тождественное отображение i вкладывает $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}$, мы имеем «шкалу пространств»

$$\mathcal{H}_{+1} \xrightarrow{i} \mathcal{H} \xrightarrow{j} \mathcal{H}_{-1}.$$

Используем теперь лемму Рисса. Пусть $\Phi \in \mathcal{H}_{+1}$. Обозначим через $\hat{B}\Phi$ элемент из $\mathcal{H}_{-1}$, заданный соотношением

$$[\hat{B}\Phi](\varphi) = q(\varphi, \Phi) + (\varphi, \Phi).$$

По лемме Рисса $\hat{B}$ — изометрический изоморфизм между $\mathcal{H}_{+1}$ и $\mathcal{H}_{-1}$. Пусть $D(B) = \{\psi \in \mathcal{H}_{+1} \mid \hat{B}\psi \in \operatorname{Ran} j\}$. Определим B на $D(B)$, полагая $B = j^{-1}\hat{B}$. Имеем

$$\mathcal{H} \supset \mathcal{H}_{+1} \xrightarrow{\hat{B}} \mathcal{H}_{-1} \xleftarrow{j} \mathcal{H}.$$

Докажем сначала, что область значений j плотна в $\mathcal{H}_{-1}$. Если бы это было не так, то существовал бы такой $\lambda \in \mathcal{H}_{-1}^{*}$, что $\lambda \neq 0$ и $\lambda[j(\psi)] = 0$ для любого $\psi \in \mathcal{H}$. Тогда по лемме Рисса существует такой вектор $\varphi_\lambda \neq 0$ в $\mathcal{H}_{+1}$, что $0 = \lambda[j(\psi)] = [j(\psi)](\varphi_\lambda) = (\varphi_\lambda, \psi)$ для всех $\psi \in \mathcal{H}$. Так как $\varphi_\lambda \neq 0$, то мы пришли к противоречию. Следовательно, область $\operatorname{Ran} j$ плотна в $\mathcal{H}_{-1}$. Поскольку B — изометрический изоморфизм, то $D(B)$ плотна в $\mathcal{H}_{+1}$ по норме $\|\cdot\|_{+1}$. Далее, так как $\|\cdot\| \leqslant \|\cdot\|_{+1}$ и $\mathcal{H}_{+1}$ плотно по норме в $\mathcal{H}$, то и $D(B)$ плотна в $\mathcal{H}$ по его норме.

Предположим, что $\varphi, \psi \in D(B)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\varphi, B\psi) &= q(\varphi, \psi) + (\varphi, \psi) = \\ &= \overline{q(\psi, \varphi) + (\psi, \varphi)} = \\ &= \overline{(\psi, B\varphi)} = (B\varphi, \psi).\end{aligned}$$

Итак, B — плотно определенный симметрический оператор.

Докажем самосопряженность B. Пусть $C = \hat{B}^{-1}j$; C отображает $\mathcal{H}$ в $\mathcal{H}$, всюду определен и симметричен. По теореме Хеллингера — Теплица C — ограниченный самосопряженный оператор. Более того, он инъективен. Простое применение спектральной теоремы в терминах оператора умножения показывает, что C^{-1}: $\operatorname{Ran} C \to \mathcal{H}$ — самосопряженный оператор. Но $C^{-1} = B$.

Введем теперь $A = B - I$. Тогда A тоже самосопряжен на $D(A) = D(B)$ и $(\varphi, A\psi) = q(\varphi, \psi)$ для $\varphi, \psi \in D(A)$. Так как $D(A)$ $\|\cdot\|_{+1}$-плотна в $\mathcal{H}_{+1}$, то q — квадратичная форма, порождаемая оператором A. Доказательство единственности мы оставляем в качестве задачи. ∎

Итак, имеется интересное различие между полуограниченными симметрическими операторами и полуограниченными квадратичными формами. Для симметрических операторов нахождение замкнутых расширений не составляет проблемы. Всегда существует наименьшее замкнутое расширение (второй сопряженный оператор), но возможно, что ни одно из замкнутых расширений не самосопряженно. С другой стороны, полуограниченные формы не обязательно имеют замкнутые расширения, но если такие расширения существуют и полуограничены, то они порождаются самосопряженными операторами.

Читателя подстерегают несколько ловушек.

(1) Если A и B — самосопряженные операторы и $D(A) \subset D(B)$, причем $B \restriction D(A) = A$, то $A = B$. Однако может оказаться, что a и b — замкнутые полуограниченные квадратичные формы и $b \restriction Q(a) \times Q(a) = a$, но $a \neq b$.

(2) Пусть A — симметрический полуограниченный оператор. Пусть q — квадратичная форма $q(\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, причем $Q(q) = D(A)$. Предположим, что q имеет замыкание (это всегда так, см. § X.3) $\hat{q}$, т. е. наименьшую замкнутую форму, расширяющую q. Тогда самосопряженный оператор $\hat{A}$, порождающий $\hat{q}$ (по теореме VIII.15), может быть шире, чем операторное замыкание A, т. е. $\hat{A} \supset \overline{A}$ и $\hat{A} \neq \overline{A}$.

(3) Хотя общая квадратичная форма может не иметь замкнутых расширений, формы, порождаемые полуограниченными операторами, всегда имеют замыкания, а, следовательно, полуограниченные операторы всегда имеют самосопряженные расширения (см. § X.3).

Следующий пример демонстрирует первые два из этих явлений.

Пример 3. Пусть $AC^2[0, 1]$ обозначает множество функций $f \in L^2[0, 1]$, таких, что f дифференцируема, f' абсолютно непрерывна и $f'' \in L^2[0, 1]$. Положим

$$D_0 = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ f(0) = f(1) = 0 = f'(0) = f'(1)\},$$
$$D_{a,b} = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ af(0) + f'(0) = 0 = bf(1) + f'(1)\},$$
$$D_{\infty,\infty} = \{f \mid f \in AC^2[0, 1],\ f(0) = 0 = f(1)\},$$
$$D = \{f \mid f \in AC^2[0, 1]\},$$

и пусть T_0, $T_{a,b}$, $T_{\infty,\infty}$ и T — операция $-d^2/dx^2$ с областями определения соответственно D_0, $D_{a,b}$, $D_{\infty,\infty}$ и D. Тогда

(a) Операторы T_0, $T_{a,b}$, $T_{\infty,\infty}$ и T замкнуты. Оператор T_0 симметричен, но не самосопряжен; его сопряженный есть T.

(b) $T_{a,b}$ $(-\infty < a < \infty,\ -\infty < b < \infty)$ и $T_{\infty,\infty}$ суть различные самосопряженные расширения T_0 (но есть и другие!).

(c) Если $t_0(\varphi, \psi) = (\varphi, T_0\psi)$ для $\varphi, \psi \in D_0$, то форма t_0 имеет наименьшее замкнутое расширение t_0. Это расширение — форма, порождаемая оператором $T_{\infty,\infty}$, что иллюстрирует замечание (2).

(d) Форма $t_{a,b}$, порождаемая $T_{a,b}$, имеет область определения $Q(t_{a,b})$, содержащую область определения $Q(t_{\infty,\infty})$ формы $t_{\infty,\infty}$, порождаемой $T_{\infty,\infty}$, и $t_{a,b} \restriction Q(t_{\infty,\infty}) = t_{\infty,\infty}$. Это иллюстрирует замечание (1).

Распространим, наконец, некоторые из этих идей на несимметрические формы. Термины «секториальная» и «аккретивная» используются ниже не совсем в стандартном смысле (см. Замечания).

Определение. Квадратичная форма q называется **строго m-аккретивной**, если

(i) q замкнута в том смысле, что если $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \to \varphi$ и
$$\lim_{n,m\to\infty} q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) = 0,$$
то $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$;

(ii) существует такое θ, $0 < \theta < \pi/2$, что $|\arg[q(\varphi, \varphi)]| \leqslant \theta$ для всех $\varphi \in Q(q)$.

Предположим теперь, что q строго m-аккретивна. Определим новую квадратичную форму R_q формулой
$$R_q(\varphi, \psi) = \frac{1}{4}\Big\{\operatorname{Re}[q(\varphi+\psi, \varphi+\psi)] - \operatorname{Re}[q(\varphi-\psi, \varphi-\psi)] + \\ + \frac{1}{i}\operatorname{Re}[q(\varphi+i\psi, \varphi+i\psi)] - \frac{1}{i}\operatorname{Re}[q(\varphi-i\psi, \varphi-i\psi)]\Big\}.$$

Отметим, что $R_q(\varphi, \varphi) = \operatorname{Re}[q(\varphi, \varphi)]$, так что R_q — замкнутая положительная форма. Ее можно использовать теперь для построения шкалы пространств $\mathcal{H}_{+1} \subset \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_{-1}$, как при доказательстве теоремы VIII.15, и для нахождения отображения $\hat{T}$: $\mathcal{H}_{+1} \to \mathcal{H}_{-1}$, такого, что $[\hat{T}\Phi](\varphi) = \overline{q(\Phi, \varphi)}$. При помощи доказательства теоремы VIII.15, выбирая T как подходящее сужение $\hat{T}$, можно получить следующую теорему:

Теорема VIII.16. Пусть q — строго m-аккретивная квадратичная форма. Тогда существует единственный оператор T в $\mathcal{H}$, такой, что

(a) T замкнут;

(b) $D(T) \subset Q(q)$, и если $\varphi, \psi \in D(T)$, то $q(\varphi, \psi) = (\varphi, T\psi)$; при этом $D(T)$ — существенная область формы q;

(c) $D(T^*) \subset Q(q)$, и если $\varphi, \psi \in D(T^*)$, то $q(\varphi, \psi) = (T^*\varphi, \psi)$. Кроме того, $D(T^*)$ — существенная область формы q.

Единственный оператор T, определенный предыдущей теоремой, называется **оператором, порождающим форму** q. Естественно, T называется **строго m-аккретивным оператором**. Спектральные свойства таких операторов определяются свойствами порождаемых ими форм.

Лемма. Пусть T — строго m-аккретивный оператор. Тогда любое λ, такое, что $\operatorname{Re}\lambda<0$, лежит в $\rho(T)$ и $\|(T-\lambda)^{-1}\|\leqslant\leqslant(-\operatorname{Re}\lambda)^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\lambda=\mu+i\nu$ и $\mu<0$. Тогда

$$\begin{aligned}\|(T-\lambda)\varphi\|^2&=((T-\lambda)\varphi,\ (T-\lambda)\varphi)=\\&=(\|T\varphi\|^2-2\nu\operatorname{Im}(\varphi,\ T\varphi)+\nu^2\|\varphi\|^2)-\\&\qquad-2\mu\operatorname{Re}(\varphi,\ T\varphi)+\mu^2\|\varphi\|^2\geqslant\\&\geqslant\mu^2\|\varphi\|^2,\end{aligned}$$

так как $\operatorname{Re}(\varphi,\ T\varphi)\geqslant 0$ и

$$\begin{aligned}&\|T\varphi\|^2-2\nu\operatorname{Im}(\varphi,\ T\varphi)+\nu^2\|\varphi\|^2\geqslant\\&\qquad\geqslant\|T\varphi\|^2-2|\nu|\,\|T\varphi\|\,\|\varphi\|+\nu^2\|\varphi\|^2\geqslant 0.\end{aligned}$$

В результате получаем, что $T-\lambda$ инъективно и $\operatorname{Ran}(T-\lambda)$ замкнута. Аналогично,

$$\|(T-\lambda)^*\varphi\|\geqslant\mu^2\|\varphi\|^2,$$

так что $(\operatorname{Ran}(T-\lambda))^\perp=\operatorname{Ker}(T-\lambda)^*=0$. Итак, $T-\lambda$ обратим и

$$\|(T-\lambda)^{-1}\|\leqslant(-\mu)^{-1}. \ \blacksquare$$

Прежде чем сформулировать теорему, несколько обобщающую эту лемму, расширим понятие аккретивности.

Определение. Форма q называется **строго m-секториальной**, если существуют комплексные числа z и $e^{i\alpha}$, где α вещественно, такие, что $e^{i\alpha}q+z$ строго m-аккретивна. Оператор T, порождающий q, также называется **строго m-секториальным.**

Отметим, что если q строго m-секториальна, то значения $q(\varphi,\ \varphi)$ лежат в секторе

$$S_q=\{\omega\,|\,\theta_0\leqslant\arg(\omega-z)\leqslant\theta_1,\ \text{где }|\theta_1-\theta_0|<\pi\};$$

S_q называется **сектором формы** q.

Теорема VIII.17. Пусть q — строго m-секториальная форма, S_q — сектор q и T — порождающий оператор. Если $\lambda\notin S_q$, то $\lambda\in\rho(T)$ и $\|(T-\lambda)^{-1}\|\leqslant[\operatorname{dist}(\lambda,\ S_q)]^{-1}$.

Идея доказательства состоит в том, чтобы сдвинуть и повернуть S_q так, чтобы расстояние $\operatorname{dist}(\lambda,\ S_q)$ было сколь угодно близко к вещественной части сдвига λ (рис. VIII.3).

Пример 4. Пусть H_0 и V — положительные самосопряженные операторы, такие, что область $Q(h)=Q(H_0)\cap Q(V)$ плотна. Для заданного $\beta\in\mathbb{C}\setminus(-\infty, 0)$ положим $h(\varphi, \psi)=(\varphi, H_0\psi)+\beta(\varphi, V\psi)$. Тогда h — замкнутая и строго m-секториальная форма, так что для получения сведений об $H=H_0+\beta V$ можно использовать теорему VIII.17.

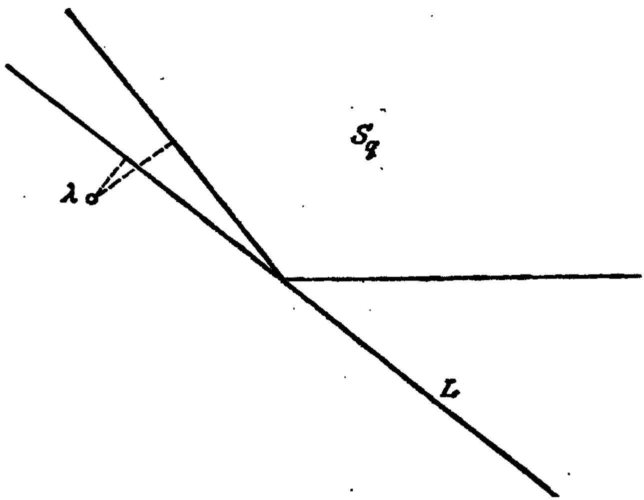

Рис. VIII.3.

Ранее символ $A+B$ понимался как операторная сумма, определенная на $D(A)\cap D(B)$, или, быть может, ее операторное замыкание. В примере 4 плюс в $H_0+\beta V$ означает оператор, порождающий сумму *форм*, определенную на $Q(H_0)\cap Q(V)$. В дальнейшем, в тех случаях когда не может возникнуть путаницы, мы будем писать $A+B$, не поясняя явно смысл знака $+$.

VIII.7. Сходимость неограниченных операторов

Одна из основных трудностей, связанных с неограниченными операторами, состоит в том, что они заданы не всюду, а лишь на плотном множестве. Эта трудность особенно заметна, когда нужно ввести понятие сходимости для последовательности $A_n \to A$ неограниченных операторов, поскольку общая часть областей определения операторов A_n может состоять из одного нуля. Например, если $A_n=(1-1/n)x$ на $L^2(\mathbb{R})$, то ясно, что в каком-то смысле $A_n \to A=x$, однако в качестве областей определения $D(A_n)$ и $D(A)$ могут быть заданы области самосопряженности в существенном для этих операторов, а они не имеют