Пример 4. Пусть H_0 и V — положительные самосопряженные операторы, такие, что область $Q(h) = Q(H_0) \cap Q(V)$ плотна. Для заданного $\beta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0)$ положим $h(\varphi, \psi) = (\varphi, H_0\psi) + \beta(\varphi, V\psi)$. Тогда h — замкнутая и строго m-секториальная форма, так что для получения сведений об $H = H_0 + \beta V$ можно использовать теорему VIII.17.

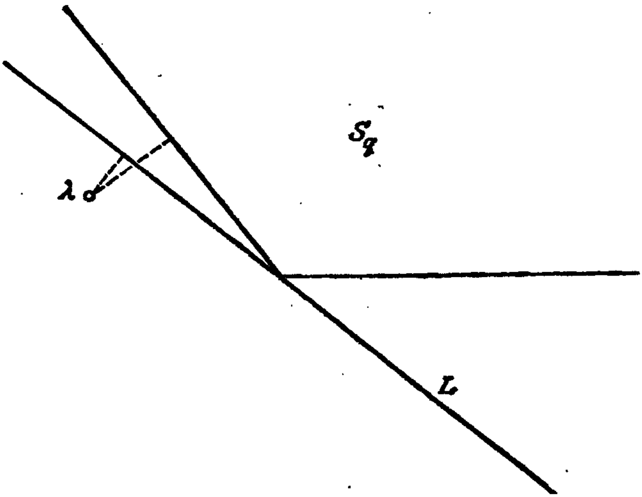

Рис. VIII.3.

Ранее символ $A + B$ понимался как операторная сумма, определенная на $D(A) \cap D(B)$, или, быть может, ее операторное замыкание. В примере 4 плюс в $H_0 + \beta V$ означает оператор, порождающий сумму *форм*, определенную на $Q(H_0) \cap Q(V)$. В дальнейшем, в тех случаях когда не может возникнуть путаницы, мы будем писать $A + B$, не поясняя явно смысл знака $+$.

VIII.7. Сходимость неограниченных операторов

Одна из основных трудностей, связанных с неограниченными операторами, состоит в том, что они заданы не всюду, а лишь на плотном множестве. Эта трудность особенно заметна, когда нужно ввести понятие сходимости для последовательности $A_n \to A$ неограниченных операторов, поскольку общая часть областей определения операторов A_n может состоять из одного нуля. Например, если $A_n = (1 - 1/n)x$ на $L^2(\mathbb{R})$, то ясно, что в каком-то смысле $A_n \to A = x$, однако в качестве областей определения $D(A_n)$ и $D(A)$ могут быть заданы области самосопряженности в существенном для этих операторов, а они не имеют ненулевых общих векторов (задача 19). Конечно, в этом простом случае одну и ту же область определения имеют замыкания A_n и A, но, вообще говоря, это не так, и вдобавок часто приходится иметь дело с областями самосопряженности в существенном, поскольку замыкания операторов иногда трудно вычислить. Вполне естественно считать самосопряженные операторы «близкими», если «близки» некоторые ограниченные функции от них. Большая часть этого раздела посвящена такому подходу. Кроме того, мы введем граф-пределы—понятие, разрабатываемое в дальнейшем в § X.8.

Определение. Пусть A_n, $n=1, 2, \ldots$, и A—самосопряженные операторы. Говорят, что A_n сходятся к A **в смысле равномерной резольвентной сходимости** (или **обобщенной равномерной сходимости**, или **обобщенной сходимости по норме**), если $R_\lambda(A_n)\to R_\lambda(A)$ равномерно при всех λ, для которых $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$. Говорят, что A_n сходится к A в смысле **сильной резольвентной сходимости** (или **обобщенной сильной сходимости**), если $R_\lambda(A_n)\to$ $\to R_\lambda(A)$ сильно при всех λ, для которых $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$.

Мы не вводим понятие слабой резольвентной сходимости, поскольку слабая резольвентная сходимость влечет за собой сильную резольвентную сходимость (задача 20). Следующая теорема показывает, что равномерная резольвентная сходимость — разумное обобщение равномерной сходимости для ограниченных самосопряженных операторов. Такой же результат имеет место и для сильной резольвентной сходимости (см. задачу 28), однако аналогичное утверждение для слабой сходимости неверно (задача 30).

Теорема VIII.18. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A—семейство равномерно ограниченных самосопряженных операторов. Тогда $A_n\to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости в том и только том случае, когда $A_n\to A$ равномерно.

Доказательство. Пусть $A_n\to A$ по норме. Тогда если $\operatorname{Im}\lambda\neq 0$, то $(A_n-A)(A-\lambda)^{-1}\to 0$ равномерно. Поскольку

$$(A_n-\lambda)^{-1}=(A-\lambda)^{-1}(I+(A_n-A)(A-\lambda)^{-1})^{-1},$$

находим, что $(A_n-\lambda)^{-1}\to(A-\lambda)^{-1}$ по норме.

Обратно, предположим, что $A_n\to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости. Тогда, так как

$$A_n-A=(A_n-i)\left[(A-i)^{-1}-(A_n-i)^{-1}\right](A-i)$$

и $\sup\|A_n\|<\infty$, заключаем, что

$$\|A_n-A\|\leqslant(\sup\|A_n\|+1)\|(A-i)^{-1}-(A_n-i)^{-1}\|(\|A\|+1)\to$$
$$\to 0 \text{ при } n\to\infty. \blacksquare$$

Следующая теорема показывает, что для доказательства обобщенной сходимости достаточно убедиться в сходимости резольвент лишь в какой-либо одной точке вне вещественной оси.

Теорема VIII.19. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и пусть λ_0 — точка из $\mathbb{C}$.

(a) Если $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ и $\|R_{\lambda_0}(A_n) - R_{\lambda_0}(A)\| \to 0$, то $A_n \to A$ в смысле равномерной резольвентной сходимости.

(b) Если $\operatorname{Im}\lambda_0 \neq 0$ и если $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi - R_{\lambda_0}(A)\varphi \to 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}$, то $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. (a) Как $R_\lambda(A)$, так и $R_\lambda(A_n)$ аналитичны в полуплоскости, содержащей λ_0, и разлагаются в степенные ряды вокруг λ_0:

$$R_\lambda(A) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m [R_{\lambda_0}(A)]^{m+1},$$

$$R_\lambda(A_n) = \sum_{m=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^m [R_{\lambda_0}(A_n)]^{m+1},$$

сходящиеся по норме в круге $|\lambda - \lambda_0| < |\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$. Так как $R_{\lambda_0}(A_n) \to R_{\lambda_0}(A)$ равномерно, то $R_\lambda(A_n) \to R_\lambda(A)$ равномерно для λ из этого круга. Следовательно, повторяя этот процесс, мы получаем сходимость для всех λ в полуплоскости, содержащей λ_0. Далее, так как

$$\begin{aligned}\|R_{\bar\lambda_0}(A_n) - R_{\bar\lambda_0}(A)\| &= \|(R_{\lambda_0}(A_n) - R_{\lambda_0}(A))^*\| = \\ &= \|R_{\lambda_0}(A_n) - R_{\lambda_0}(A)\| \to \\ &\to 0 \text{ при } n \to \infty,\end{aligned}$$

те же рассуждения показывают, что резольвенты сходятся по норме в полуплоскости, содержащей $\bar\lambda_0$.

(b) Доказательство то же, что и для (a), за исключением двух моментов. Во-первых, рассматриваются *векторнозначные* функции $R_\lambda(A_n)\varphi$ и $R_\lambda(A)\varphi$. Во-вторых, поскольку отображение $T \to T^*$ не является непрерывным в сильной топологии, необходимо специальное обоснование для перехода из одной полуплоскости в другую. Предположим, что λ_0 лежит в нижней полуплоскости. Тогда, как и в (a), получаем сходимость всюду в нижней полуплоскости и, в частности, при $\lambda = -i$. На основе равенства

$$\begin{aligned}&(A_n - i)^{-1} - (A - i)^{-1} = \\ &\quad = [(A_n + i)(A_n - i)^{-1}][(A_n + i)^{-1} - (A + i)^{-1}][(A + i)(A - i)^{-1}],\end{aligned}$$

которое получается путем элементарных вычислений, можно доказать сильную сходимость $(A_n - i)^{-1}$ к $(A - i)^{-1}$. А тогда приведенное выше рассуждение показывает, что $R_\lambda(A_n)$ сильно сходится к $R_\lambda(A)$ всюду в верхней полуплоскости. ∎

Иные способы доказательства того, что из сильной сходимости $R_\lambda(A_n)\xrightarrow{s}R_\lambda(A)$ в одной полуплоскости следует сильная сходимость в другой полуплоскости, приведены в теореме VIII.26 и задаче 20b.

Исследуем некоторые свойства обобщенной сходимости. Во-первых, мы выясним, как резольвентная сходимость связана со сходимостью других ограниченных функций от A_n и A. Во-вторых, изучим связь между спектрами A_n и спектром A, если $A_n\to A$ в обобщенном смысле. Наконец, сформулируем непосредственно в терминах операторов A_n, A условие, достаточное, чтобы гарантировать обобщенную сходимость A_n к A.

Теорема VIII.20. Пусть A_n и A — самосопряженные операторы.

(a) Если $A_n\to A$ в равномерном резольвентном смысле и f — непрерывная функция на $\mathbb{R}$, исчезающая на ∞, то $\|f(A_n)-f(A)\|\to 0$.

(b) Если $A_n\to A$ в сильном резольвентном смысле и f — ограниченная функция на $\mathbb{R}$, то $f(A_n)\varphi\to f(A)\varphi$ для всех $\varphi\in\mathscr{H}$.

Доказательство. По теореме Стоуна — Вейерштрасса полиномы по $(x+i)^{-1}$ и $(x-i)^{-1}$ плотны в $C_\infty(\mathbb{R})$ — множестве непрерывных функций, исчезающих на бесконечности. Тогда для заданного $\varepsilon>0$ можно найти такой полином $P(s, t)$, что

$$\|f(x)-P((x+i)^{-1}, (x-i)^{-1})\|_\infty\leqslant\varepsilon/3.$$

Поэтому

$$\|f(A_n)-P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\|\leqslant\varepsilon/3$$

и

$$\|f(A)-P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})\|\leqslant\varepsilon/3.$$

Если $A_n\to A$ в равномерном резольвентном смысле, то

$$P((A_n+i)^{-1}, (A_n-i)^{-1})\to P((A+i)^{-1}, (A-i)^{-1})$$

по норме при $n\to\infty$, а, следовательно, $\|f(A_n)-f(A)\|\leqslant\varepsilon$ для достаточно больших n. Это доказывает (a).

Чтобы доказать (b), отметим сначала, что точно так же, как выше, можно показать, что если $A_n\to A$ в сильном резольвентном смысле и $h\in C_\infty(\mathbb{R})$, то $h(A_n)\varphi\to h(A)\varphi$. Пусть заданы $\psi\in\mathscr{H}$ и $\varepsilon>0$; положим $g_m(x)=\exp(-x^2/m)$. Так как $g_m(x)\uparrow 1$ поточечно, то $g_m(A)\psi\to\psi$ по теореме VIII.5, следовательно, можно найти такое m, что $\|g_m(A)\psi-\psi\|\leqslant\varepsilon(6\|f\|_\infty)^{-1}$. Более того, так как $g_m\in C_\infty(\mathbb{R})$, то $g_m(A_n)\psi\to g_m(A)\psi$ по сделанному выше замечанию, и можно найти такое N_0, что при $n\geqslant N_0$

имеем $\|g_m(A_n)\psi - g_m(A)\psi\| \leqslant \varepsilon(6\|f\|_\infty)^{-1}$. Следовательно, если $n \geqslant N_0$, то

$$\|g_m(A_n)\psi - \psi\| \leqslant \varepsilon(3\|f\|_\infty)^{-1}.$$

Поскольку fg_m непрерывна и стремится к нулю на ∞, то существует такое N_1, что при $n \geqslant N_1$

$$\|f(A_n)g_m(A_n)\psi - f(A)g_m(A)\psi\| \leqslant \varepsilon/3.$$

Пусть $N = \max\{N_0, N_1\}$. Тогда при $n \geqslant N$

$$\begin{aligned}\|f(A_n)\psi - f(A)\psi\| \leqslant \|f(A_n)g_m(A_n)\psi - f(A)g_m(A)\psi\| &+ \\ + \|f(A_n)\|\,\|g_m(A_n)\psi - \psi\| &+ \\ + \|f(A)\|\,\|g_m(A)\psi - \psi\| &\leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

В силу произвольности ψ и ε, это доказывает (b). ∎

Применим часть (a) к случаю, когда $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы. Тогда если $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле, то e^{-tA_n} сходится равномерно к e^{-tA} при любом положительном t. Часть (a) не распространяется на все пространство $C(\mathbb{R})$. В самом деле, в $L^2(\mathbb{R})$ операторы $A_n = (1 - 1/n)x$ сходятся к оператору $A = x$ в равномерном резольвентном смысле, но $\|e^{iA_n} - e^{iA}\| = 2$ при всех n.

Очень важным приложением части (b) является следующая

Теорема VIII.21 (Троттер). Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Тогда $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле в том и только в том случае, когда e^{itA_n} сильно сходится к e^{itA} при всех t.

Доказательство. Поскольку e^{itx} — ограниченная непрерывная функция от x, из теоремы VIII.20 следует, что если $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n} \to e^{itA}$ сильно при любом t.

Для доказательства обратного утверждения выведем сначала одну полезную формулу для резольвенты самосопряженного оператора A. Предположим, что $\operatorname{Im}\mu < 0$. Тогда в соответствии с функциональным исчислением

$$\begin{aligned}(\psi,\ R_\mu(A)\varphi) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu-\lambda}\right)d(\psi,\ P_\lambda\varphi) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(i\int_0^\infty e^{-it\mu}e^{it\lambda}\,dt\right)d(\psi,\ P_\lambda\varphi) = \\ &= i\int_0^\infty e^{-it\mu}\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{it\lambda}\,d(\psi,\ P_\lambda\varphi)\right)dt = \\ &= i\int_0^\infty e^{-it\mu}(\psi,\ e^{itA}\varphi)\,dt = \\ &= \left(\psi,\ i\int_0^\infty e^{-it\mu}e^{itA}\varphi\,dt\right).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$R_\mu(A)\varphi = i\int_0^\infty e^{-it\mu}e^{itA}\varphi\,dt, \qquad \text{(VIII.9)}$$

где интеграл понимается в смысле Римана. Третий шаг вычислений основан на теореме Фубини. Применяя (VIII.9) к операторам A_n и A, имеем

$$\|R_\mu(A_n)\varphi - R_\mu(A)\varphi\| \leqslant \int_0^\infty e^{(\operatorname{Im}\mu)t}\|e^{itA_n}\varphi - e^{itA}\varphi\|\,dt,$$

так что если $e^{itA_n}\varphi \to e^{itA}\varphi$ при всех t, то

$$\|R_\mu(A_n)\varphi - R_\mu(A)\varphi\| \to 0$$

по теореме о мажорированной сходимости. Используя формулу, аналогичную (VIII.9), тем же способом находим, что

$$\|R_\mu(A_n)\varphi - R_\mu(A)\varphi\| \to 0 \text{ при } \operatorname{Im}\mu > 0. \blacksquare$$

Отметим, что (задача 21) если $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n}\varphi \to e^{itA}\varphi$ при каждом φ *равномерно* по t в любом конечном интервале. Теперь будет доказана родственная предыдущей

Теорема VIII.22 (Троттер—Като). Пусть A_n—последовательность самосопряженных операторов. Предположим, что существуют такие точки λ_0 в верхней полуплоскости и μ_0 в нижней, что $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi$ и $R_{\mu_0}(A_n)\varphi$ сходятся для каждого $\varphi\in\mathscr{H}$. Предположим далее, что один из предельных операторов T_{λ_0} или

T_{μ_0} имеет плотную область значений. Тогда существует самосопряженный оператор A, такой, что $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

Доказательство. Поскольку $\|R_{\lambda_0}(A_n)\| \leqslant |\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$, имеем $\|T_{\lambda_0}\| \leqslant |\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$, а тогда

$$T_\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^n (T_{\lambda_0})^{n+1}$$

корректно определен при $|\lambda - \lambda_0| \leqslant |\operatorname{Im}\lambda_0|^{-1}$.

Более того, так как $R_{\lambda_0}(A_n)\varphi \to T_{\lambda_0}\varphi$, то $R_\lambda(A_n)\varphi \to T_\lambda\varphi$ в этом же круге. Продолжая таким же образом, можно определить аналитическую операторнозначную функцию T_λ в полуплоскости, содержащей λ_0, которая есть сильный предел $R_\lambda(A_n)$. Но полуплоскость односвязна, поэтому значение T_λ в точке λ не зависит от выбранного пути от λ_0 к λ. То же построение для полуплоскости, содержащей μ_0, показывает, что можно расширить определение T_λ на эту полуплоскость так, чтобы

$$T_\lambda\varphi = \lim_{n\to\infty} R_\lambda(A_n)\varphi \text{ при всех } \lambda, \text{ для которых } \operatorname{Im}\lambda \neq 0.$$

Такие T_λ коммутируют, удовлетворяют тождеству Гильберта и $T_\lambda^* = T_{\bar\lambda}$, так как эти свойства справедливы для любого $R_\lambda(A_n)$. Из тождества Гильберта и коммутативности следует, что области значений всех T_λ совпадают. Обозначим эту общую область через D. По предположению D плотна, а отсюда следует, что ядро T_λ пусто, так как $\operatorname{Ker} T_\lambda = (\operatorname{Ran} T_\lambda^*)^\perp = (\operatorname{Ran} T_{\bar\lambda})^\perp = D^\perp = \{0\}$. Поэтому можно положить $A = \lambda I - T_\lambda^{-1}$ на D и показать (при помощи короткого вычисления с использованием тождества Гильберта), что это определение не зависит от того, какое λ ($\operatorname{Im}\lambda \neq 0$) выбрано. Поскольку $\operatorname{Ran}(A \pm i) = \operatorname{Ran}(-T_{\mp i}^{-1}) = \mathscr{H}$, то A самосопряжен. Очевидно, что резольвентой A является T_λ. ∎

Отметим, что в теореме Троттера—Като нам необходима сходимость в *двух* точках, одна из которых находится в верхней, а другая в нижней полуплоскости. Действительно, мы не можем использовать теорему VIII.19b до тех пор, пока не убедимся в самосопряженности предельного оператора, а доказательство самосопряженности опирается на сходимость в обеих полуплоскостях.

Теорема Троттера—Като хороша тем, что в ней a priori не предполагается существования предельного оператора A. Ее можно использовать для доказательства существования обобщенного предела последовательности самосопряженных операторов. То же можно сделать и с помощью однопараметрических групп (см. задачу 23). Чтобы понять, почему для доказательства таких теорем существования приходится использовать резольвенты или группы, а не сами операторы, рассмотрим следующий пример. Пусть A — замкнутый симметрический оператор, не самосопряженный, но имеющий самосопряженное расширение $\tilde{A}$. Пусть P_n — спектральный проектор $\tilde{A}$, соответствующий интервалу $[-n, n]$. Тогда $P_n\tilde{A}P_n$ — ограниченные самосопряженные операторы (и, следовательно, в существенном самосопряженные на $D(A)$), такие, что для всех $\varphi \in D(A)$

$$P_n\tilde{A}P_n\varphi \longrightarrow \tilde{A}\varphi = A\varphi.$$

Таким образом, $P_n\tilde{A}P_n$ в существенном самосопряженны на $D(A)$ и сильный предел существует, но не самосопряжен в существенном.

Одним из наиболее полезных свойств обобщенной сходимости является то, что спектры и проекторы A_n связаны со спектром и проекторами A. Приложения двух следующих теорем приведены в § X.2 и XI.5.

Теорема VIII.23. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и пусть $A_n \longrightarrow A$ в равномерном резольвентном смысле. Тогда

(a) если $\mu \notin \sigma(A)$, то $\mu \notin \sigma(A_n)$ для достаточно больших n и

$$\| R_\mu(A_n) - R_\mu(A) \| \longrightarrow 0;$$

(b) если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $a \in \rho(A)$, $b \in \rho(A)$, то

$$\| P_{(a, b)}(A_n) - P_{(a, b)}(A) \| \longrightarrow 0.$$

Доказательство. (a) Следует рассмотреть лишь случай, когда μ вещественно. Поскольку $\mu \in \rho(A)$, существует такое $\delta > 0$, что $(\mu - \delta, \mu + \delta) \cap \sigma(A) = \varnothing$. Тогда, в силу функционального исчисления, $\| R_{\mu + i\delta/3}(A) \| \leqslant 1/\delta$ и можно найти такое N, что

$$\| R_{\mu + i\delta/3}(A_n) \| \leqslant 2/\delta$$

при $n \geqslant N$, откуда следует, что степенной ряд для $R_\lambda(A_n)$ вблизи $\mu + i\delta/3$ имеет радиус сходимости не менее $\delta/2$. Известно, что когда этот ряд сходится, он дает обратный оператор к $A_n - \lambda$. Тогда $\mu \in \rho(A_n)$ при $n \geqslant N$ и

$$\| R_\mu(A_n) - R_\mu(A) \| \longrightarrow 0.$$

Докажем (b). Поскольку $a, b \in \rho(A)$, существуют такие $\varepsilon < (b - a)/2$ и N, что

$$\sup_{n \geqslant N} \{ \| (A_n - a)^{-1} \|, \| (A_n - b)^{-1} \| \} \leqslant 1/\varepsilon.$$

Следовательно, в соответствии с функциональным исчислением $\sigma(A_n) \cap (a, b) \subset (a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ при $n \geqslant N$. Пусть f — непрерывная функция, равная единице на $(a+\varepsilon, b-\varepsilon)$ и нулю вне (a, b). Тогда

$$P_{(a, b)}(A_n) = f(A_n), \quad P_{(a, b)}(A) = f(A),$$

а, следовательно, по теореме VIII.20

$$\| P_{(a, b)}(A_n) - P_{(a, b)}(A) \| \to 0. \ \blacksquare$$

Теорема VIII. 24. Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — самосопряженные операторы, и предположим, что $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле. Тогда

(a) если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $(a, b) \cap \sigma(A_n) = \varnothing$ для всех n, то $(a, b) \cap \sigma(A) = \varnothing$, т. е. если $\lambda \in \sigma(A)$, то существуют такие $\lambda_n \in \sigma(A_n)$, что $\lambda_n \to \lambda$;

(b) если $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ и $a, b \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(A)$, то $P_{(a, b)}(A_n)\varphi \to P_{(a, b)}(A)\varphi$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}$.

Доказательство. В силу функционального исчисления равенство $(a, b) \cap \sigma(A) = \varnothing$ эквивалентно неравенству

$$\| (A - \lambda_0)^{-1} \| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{b-a},$$

где

$$\lambda_0 = \frac{a+b}{2} + i\left(\frac{b-a}{2}\right).$$

Но $(A_n - \lambda_0)^{-1}$ сильно сходится к $(A - \lambda_0)^{-1}$, так что

$$\| (A - \lambda_0)^{-1} \| \leqslant \varliminf_n \| (A_n - \lambda_0)^{-1} \| \leqslant \frac{\sqrt{2}}{b-a}.$$

Тем самым доказано (a).

Докажем (b). Выберем равномерно ограниченные последовательности непрерывных функций f_n и g_n, такие, что $0 \leqslant f_n \leqslant \chi_{(a, b)}$, $f_n(x) \nearrow \chi_{(a, b)}(x)$ поточечно и $\chi_{[a, b]} \leqslant g_n$, $g_n(x) \searrow \chi_{[a, b]}(x)$ поточечно. Тогда $f_n(A) \to P_{(a, b)}(A)$ и $g_n(A) \to P_{[a, b]}(A)$ сильно. Поскольку $a, b \notin \sigma_{\mathrm{pp}}(A)$, имеем $P_{[a, b]}(A) = P_{(a, b)}(A)$, а это означает, что по заданным ψ и $\varepsilon > 0$ можно найти непрерывные функции f, g, такие, что $f \leqslant \chi_{(a, b)} \leqslant \chi_{[a, b]} \leqslant g$ и $\| f(A)\psi - g(A)\psi \| \leqslant \varepsilon/5$. По теореме VIII.20 (b) найдется такое N, что при $n \geqslant N$

$$\| f(A_n)\psi - f(A)\psi \| \leqslant \varepsilon/5, \qquad \| g(A_n)\psi - g(A)\psi \| \leqslant \varepsilon/5;$$

тогда $\varepsilon/3$-прием дает

$$\| f(A_n)\psi - g(A_n)\psi \| \leqslant 3\varepsilon/5.$$

Из функционального исчисления следует, что

$$\| f(A)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi \| \leqslant \| f(A)\psi - g(A)\psi \|;$$

поэтому, еще раз применяя $\varepsilon/3$-прием, получаем

$$\| P_{(a,b)}(A_n)\psi - P_{(a,b)}(A)\psi \| \leqslant \varepsilon. \blacksquare$$

Часть (а) теоремы VIII.24 гласит, что спектр предельного оператора не может неожиданно расшириться. Однако он может сжиматься, причем, как показывает следующий пример, весьма сильно. Пусть $A_n = x/n$ на $L^2(\mathbb{R})$; тогда A_n сходится к нулевому оператору в сильном резольвентном смысле. Для каждого n спектр $\sigma(A_n) = \mathbb{R}$, но спектр предельного оператора содержит лишь точку нуль. Как простое применение части (а) получаем утверждение, что если A_n положительны и $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле, то и A положителен.

Если A_n сходится к A в *равномерном* резольвентном смысле, то теорема VIII.23 утверждает, что спектр предельного оператора не может неожиданно сжаться: если $\lambda \notin \sigma(A_n)$ для достаточно больших n, то $\lambda \notin \sigma(A)$. Отметим, что в приведенном выше примере $A_n = x/n$, операторы A_n не сходятся к A в равномерном резольвентном смысле.

Принцип несжимаемости спектра при равномерной резольвентной сходимости остается справедливым, даже если A_n и A не самосопряжены. Принцип же нерасширяемости спектра в сильном резольвентном пределе не всегда справедлив для общих (не обязательно самосопряженных) операторов. Действительно, существует *равномерно* сходящаяся последовательность равномерно ограниченных операторов $A_n \to A$, для которой $\sigma(A_n)$—единичная окружность в $\mathbb{C}$ при каждом n, а $\sigma(A)$— весь единичный круг. Поэтому применять теорему VIII.24 можно только в самосопряженном случае.

В приложениях обычно заданы операторы $\{A_n\}$ и A на областях самосопряженности или самосопряженности в существенном, а не резольвенты, и вычисление последних может оказаться очень сложным. Поэтому для применения теорем VIII.23 и VIII.24 необходимо иметь условие непосредственно на операторы A_n, A, которое обеспечивает равномерную или сильную резольвентную сходимость.

Теорема VIII.25. (а) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A—самосопряженные операторы, и предположим, что D—общая существенная область для всех A_n, A. Если $A_n\varphi \to A\varphi$ для каждого $\varphi \in D$, то $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле.

(b) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A—самосопряженные операторы с общей областью определения D. Введем в D норму $\| \varphi \|_A = \| A\varphi \| + \| \varphi \|$.

Если

$$\sup_{\|\varphi\|_A=1} \|(A_n-A)\varphi\| \to 0,$$

то $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле.

(c) Пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ и A — положительные самосопряженные операторы с общей областью определения форм $\mathcal{H}_{+1}$, которая наделена нормой

$$\|\psi\|_{+1} = \sqrt{(\psi, A\psi)+(\psi, \psi)}.$$

Если $A_n \to A$ по норме в смысле отображений из $\mathcal{H}_{+1}$ в $\mathcal{H}_{-1}$, т. е. если

$$\sup_{0\neq\psi,\ \varphi\in D} \frac{|(\varphi, (A-A_n)\psi)|}{\|\varphi\|_{+1}\|\psi\|_{+1}} = \sup_{0\neq\psi\in D} \frac{|(\psi, (A-A_n)\psi)|}{(\psi, (A+1)\psi)} \to 0,$$

то $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле.

Доказательство. (a) Пусть $\varphi \in D$, $\psi=(A+i)\varphi$; тогда

$$[(A_n+i)^{-1}-(A+i)^{-1}]\psi=(A_n+i)^{-1}(A-A_n)\varphi$$

сходится к нулю при $n\to\infty$, поскольку $(A-A_n)\varphi\to 0$ и операторы $(A_n+i)^{-1}$ равномерно ограничены. Так как D — существенная область для A, то множество таких ψ плотно, поэтому

$$(A_n+i)^{-1}\varphi \to (A+i)^{-1}\varphi \text{ для всех } \varphi\in\mathcal{H}.$$

Аналогичное доказательство проходит и для $(A_n-i)^{-1}$.

Опишем в общих чертах доказательства (b) и (c). Для (b) сначала доказывается, что предположения равносильны сходимости $(A_n-A)(A+i)^{-1}\to 0$ по обычной $\mathcal{H}$-операторной норме. Тогда $(I+(A_n-A)(A+i)^{-1})^{-1}$ существует и равномерно сходится к I при $n\to\infty$. Имеем

$$(A_n+i)^{-1}=(A+i)^{-1}(I+(A_n-A)(A+i)^{-1})^{-1}\to(A+i)^{-1}$$

равномерно. Аналогично $(A_n-i)^{-1}\to(A-i)^{-1}$.

Чтобы доказать (c), сначала доказываем, что предположения равносильны условию

$$(A+I)^{-1/2}(A_n-A)(A+I)^{-1/2}\to 0$$

по обычной операторной норме. Используя равенство

$$(A_n+I)^{-1}=$$
$$=(A+I)^{-1/2}(I+(A+I)^{-1/2}(A_n-A)(A+I)^{-1/2})^{-1}(A+I)^{-1/2},$$

поступаем дальше так же, как и при доказательстве (b). ∎

Введем, наконец, понятие граф-пределов и сравним их с обобщенными пределами. Далее мы еще раз вернемся к граф-пределам в § X.8.

Определение. Пусть A_n — последовательность операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Мы говорим, что $\langle\psi, \varphi\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ лежит **в сильном граф-пределе** A_n, если можно найти такие $\psi_n \in D(A_n)$, что $\psi_n \to \psi$, $A_n\psi_n \to \varphi$. Множество пар, принадлежащих сильному граф-пределу, обозначим Γ^s_∞. Если Γ^s_∞ — график некоторого оператора A, то мы говорим, что A — **сильный граф-предел** A_n, и записываем $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$.

Рассмотрим сначала случай, когда все A_n самосопряжены *и A тоже самосопряжен.*

Теорема VIII.26. Предположим, что $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Тогда $A_n \to A$ в сильном резольвентном смысле в том и только в том случае, когда $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$.

Доказательство. Предположим сначала, что $(A_n + i)^{-1} \to (A + i)^{-1}$ сильно. Пусть $\varphi \in D(A)$. Тогда $\varphi_n \equiv (A_n + i)^{-1}(A + i)\varphi \to \varphi$ и $A_n\varphi_n = (A + i)\varphi - i\varphi_n \to A\varphi$, так что $\langle\varphi, A\varphi\rangle \in \Gamma^s_\infty$. Итак, $\Gamma(A) \subset \Gamma^s_\infty$. С другой стороны, пусть $\varphi_n \in D(A_n)$, $\varphi_n \to \varphi$ и $A_n\varphi_n \to \psi$. Если положить $\eta_n = (A + i)^{-1}(A_n + i)\varphi_n \in D(A)$, то

$$\begin{aligned}\eta_n - \varphi_n &= [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][(A_n+i)\varphi_n] = \\ &= [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][(A_n+i)\varphi_n - \psi - i\varphi] + \\ &\quad + [(A+i)^{-1} - (A_n+i)^{-1}][\psi + i\varphi] \to \\ &\to 0 \text{ при } n \to \infty.\end{aligned}$$

Итак, $\eta_n \to \varphi$ и $A\eta_n = (A_n + i)\varphi_n - i\eta_n \to \psi$, так что, в силу замкнутости A, $\langle\varphi, \psi\rangle \in \Gamma(A)$. Следовательно, $\Gamma(A) = \Gamma^s_\infty$.

Обратно, предположим, что $A = \text{st.gr.-lim}\, A_n$. Пусть $\varphi \in D(A)$. Тогда существуют такие $\varphi_n \in D(A_n)$, что $\varphi_n \to \varphi$ и $A_n\varphi_n \to A\varphi$. Значит,

$$\begin{aligned}&[(A_n+i)^{-1} - (A+i)^{-1}](A+i)\varphi = \\ &= (A_n+i)^{-1}[(A+i)\varphi - (A_n+i)\varphi_n] - (\varphi - \varphi_n) \to \\ &\to 0 \text{ при } n \to \infty,\end{aligned}$$

так как $\|(A_n + i)^{-1}\| \leqslant 1$, $(A_n + i)\varphi_n \to (A + i)\varphi$ и $\varphi_n \to \varphi$. Поскольку $\operatorname{Ran}(A + i) = \mathscr{H}$, отсюда следует сильная сходимость $(A_n + i)^{-1}$ к $(A + i)^{-1}$. ∎

Итак, мы видим, что *если предел самосопряжен*, то сильная граф-сходимость и сильная резольвентная сходимость — одно и то же. Сильные граф-пределы особенно интересны именно в том случае, когда a priori не известна самосопряженность предела. Например, в § X.8 мы увидим, что существование граф-предела в сочетании с некоторой дополнительной информацией можно иногда использовать для доказательства самосопряженности предельного оператора.

Теорема VIII.27. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов.

(a) Пусть $D^s_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^s_\infty$ для некоторого $\varphi\}$. Если D^s_∞ плотно, то Γ^s_∞ — график некоторого оператора.

(b) Предположим, что D^s_∞ плотно, и пусть $A = \text{st. gr.-lim}\, A_n$. Тогда A симметрический и замкнутый.

Доказательство. Мы докажем (a), а доказательство (b) оставим в качестве упражнения (задача 24). Предположим, что $\varphi_n, \varphi_n' \in D(A_n)$ и $\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n' \to \varphi$, $A_n\varphi_n \to \psi$ и $A_n\varphi_n' \to \psi'$. Пусть $\eta \in D^s_\infty$. Тогда существуют такие $\eta_n \in D(A_n)$, что $\eta_n \to \eta$ и $A_n\eta_n \to \rho$. Отсюда

$$
\begin{aligned}
(\psi - \psi', \eta) &= \lim_{n\to\infty} (A_n(\varphi_n - \varphi_n'), \eta_n) = \\
&= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi_n', A_n\eta_n) = 0,
\end{aligned}
$$

так что $\psi = \psi'$, в силу плотности D^s_∞. ∎

Можно ввести еще слабый граф-предел. Мы дадим определение и сформулируем одну теорему.

Определение. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность операторов в $\mathscr{H}$. Мы говорим, что $\langle\psi, \varphi\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ лежит в **слабом граф-пределе** Γ^w_∞, если можно найти такие $\psi_n \in D(A_n)$, что $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi$, а $A_n\psi_n \to \varphi$ слабо. Если Γ^w_∞ — график некоторого оператора A, то говорят, что A — **слабый граф-предел** A_n; $A = \text{w. gr.-lim}\, A_n$.

Теорема VIII.28. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов. Если область

$$D^w_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^w_\infty \text{ при некотором } \varphi\}$$

плотна, то Γ^w_∞ — график симметрического оператора.

Наконец, отметим, что если A_n — равномерно ограниченная последовательность операторов, то $A = \text{w. gr.-lim}\, A_n$ тогда и только тогда, когда $A_n \to A$ в слабой операторной топологии (задача 26). Этот факт вместе с задачами 20 и 28 показывает, что понятия слабого граф-предела и слабой резольвентной сходимости различны. Вопрос о том, замкнут ли граф-предел, если каждый A_n симметричен, остается открытым.

VIII.8. Формула Троттера для произведения

В этом разделе мы докажем одну полезную теорему об аппроксимации $\exp t(A+B)$ при помощи $\exp tA$ и $\exp tB$. Чтобы пояснить идею, рассмотрим сначала конечномерные матрицы, для которых имеется классическая теорема Ли.