Теорема VIII.27. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов.

(a) Пусть $D^s_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^s_\infty$ для некоторого $\varphi\}$. Если D^s_∞ плотно, то Γ^s_∞ — график некоторого оператора.

(b) Предположим, что D^s_∞ плотно, и пусть $A = \mathrm{st.\,gr.\text{-}lim}\, A_n$. Тогда A симметрический и замкнутый.

Доказательство. Мы докажем (a), а доказательство (b) оставим в качестве упражнения (задача 24). Предположим, что $\varphi_n, \varphi_n' \in D(A_n)$ и $\varphi_n \to \varphi$, $\varphi_n' \to \varphi$, $A_n\varphi_n \to \psi$ и $A_n\varphi_n' \to \psi'$. Пусть $\eta \in D^s_\infty$. Тогда существуют такие $\eta_n \in D(A_n)$, что $\eta_n \to \eta$ и $A_n\eta_n \to \rho$. Отсюда

$$\begin{aligned}(\psi - \psi', \eta) &= \lim_{n\to\infty} (A_n(\varphi_n - \varphi_n'),\ \eta_n) = \\ &= \lim_{n\to\infty} (\varphi_n - \varphi_n',\ A_n\eta_n) = 0,\end{aligned}$$

так что $\psi = \psi'$, в силу плотности D^s_∞. ∎

Можно ввести еще слабый граф-предел. Мы дадим определение и сформулируем одну теорему.

Определение. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность операторов в $\mathscr{H}$. Мы говорим, что $\langle\psi, \varphi\rangle \in \mathscr{H} \times \mathscr{H}$ лежит в **слабом граф-пределе** Γ^w_∞, если можно найти такие $\psi_n \in D(A_n)$, что $\psi_n \xrightarrow{\|\cdot\|} \psi$, а $A_n\psi_n \to \varphi$ слабо. Если Γ^w_∞ — график некоторого оператора A, то говорят, что A — **слабый граф-предел** A_n; $A = \mathrm{w.\,gr.\text{-}lim}\, A_n$.

Теорема VIII.28. Пусть $\{A_n\}$ — последовательность симметрических операторов. Если область

$$D^w_\infty = \{\psi \mid \langle\psi, \varphi\rangle \in \Gamma^w_\infty \text{ при некотором } \varphi\}$$

плотна, то Γ^w_∞ — график симметрического оператора.

Наконец, отметим, что если A_n — равномерно ограниченная последовательность операторов, то $A = \mathrm{w.\,gr.\text{-}lim}\, A_n$ тогда и только тогда, когда $A_n \to A$ в слабой операторной топологии (задача 26). Этот факт вместе с задачами 20 и 28 показывает, что понятия слабого граф-предела и слабой резольвентной сходимости различны. Вопрос о том, замкнут ли граф-предел, если каждый A_n симметричен, остается открытым.

VIII.8. Формула Троттера для произведения

В этом разделе мы докажем одну полезную теорему об аппроксимации $\exp t(A+B)$ при помощи $\exp tA$ и $\exp tB$. Чтобы пояснить идею, рассмотрим сначала конечномерные матрицы, для которых имеется классическая теорема Ли.

Теорема VIII.29 (формула Ли для произведения). Пусть A и B — конечномерные матрицы. Тогда

$$\exp(A+B)=\lim_{n\to\infty}[\exp(A/n)\exp(B/n)]^n.$$

Доказательство. Пусть $S_n=\exp[(A+B)/n]$, $T_n=\exp(A/n)\times\exp(B/n)$. Тогда

$$S_n^n-T_n^n=\sum_{m=0}^{n-1}S_n^m(S_n-T_n)T_n^{n-1-m},$$

так что

$$\|S_n^n-T_n^n\|\leqslant n(\max\{\|S_n\|,\ \|T_n\|\})^{n-1}\|S_n-T_n\|\leqslant$$
$$\leqslant n\|S_n-T_n\|\exp(\|A\|+\|B\|).$$

Так как

$$\|S_n-T_n\|=$$
$$=\left\|\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{A+B}{n}\right)^m-\left(\sum_{=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{A}{n}\right)^m\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\left(\frac{B}{n}\right)^m\right)\right\|\leqslant$$
$$\leqslant C/n^2 \text{ (C зависит от $\|A\|$ и $\|B\|$)},$$

то $\|S_n^n-T_n^n\|\to 0$. ∎

Эту теорему *и ее доказательство* можно распространить на случай, когда A и B — неограниченные самосопряженные операторы и $A+B$ *самосопряжен* на $D=D(A)\cap D(B)$.

Теорема VIII.30. Пусть A и B — самосопряженные операторы в $\mathscr{H}$, и предположим, что $A+B$ самосопряжен на $D=D(A)\cap\cap D(B)$. Тогда

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}[e^{itA/n}e^{itB/n}]^n=e^{it(A+B)}.$$

Доказательство. Пусть $\psi\in D$. Тогда

$$s^{-1}(e^{isA}e^{isB}-I)\psi=s^{-1}(e^{isA}-I)\psi+s^{-1}e^{isA}(e^{isB}-I)\psi\to iA\psi+iB\psi$$

и

$$s^{-1}(e^{is(A+B)}-I)\psi\to i(A+B)\psi$$

при $s\to 0$. Полагая $K(s)=s^{-1}(e^{isA}e^{isB}-e^{is(A+B)})$, видим, что $K(s)\psi\to 0$ при $s\to 0$ и любом $\psi\in D$. Так как $A+B$ самосопряжен на D, то D — банахово пространство относительно нормы

$$\|\psi\|_{A+B}=\|(A+B)\psi\|+\|\psi\|.$$

Каждое из отображений $K(s)$: $D\to\mathscr{H}$ ограничено и $K(s)\psi\xrightarrow{\mathscr{H}}0$ при $s\to 0$ или ∞ для каждого $\psi\in D$. Таким образом, по теореме о равномерной ограниченности, $K(s)$ равномерно ограничены, т. е. существует такая постоянная C, что

$$\|K(s)\psi\| \leqslant C\|\psi\|_{A+B} \text{ для всех } s\in\mathbb{R} \text{ и } \psi\in D.$$

Тогда при помощи $\varepsilon/3$-приема убеждаемся, что $K(s)\psi\to 0$ равномерно на $\|\cdot\|_{A+B}$-компактных подмножествах D.

В силу самосопряженности $A+B$ на D, вектор $e^{is(A+B)}\psi\in D$, если $\psi\in D$. Более того, $s\to e^{is(A+B)}\psi$ — непрерывное отображение $\mathbb{R}$ в D, когда D снабжено топологией нормы $\|\cdot\|_{A+B}$. Итак, $\{e^{is(A+B)}\psi \mid s\in[-1, 1]\}$ есть $\|\cdot\|_{A+B}$-компактное множество в D при каждом заданном ψ.

Далее можно скопировать доказательство формулы Ли. Известно, что

$$t^{-1}\left[e^{itA}e^{itB}-e^{it(A+B)}\right]e^{is(A+B)}\psi\to 0$$

равномерно по $s\in[-1, 1]$. Следовательно,

$$\left[\left(e^{itA/n}e^{itB/n}\right)^n-\left(e^{it(A+B)/n}\right)^n\right]\psi=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left(e^{itA/n}e^{itB/n}\right)^k\left[e^{itA/n}e^{itB/n}-e^{it(A+B)/n}\right]\cdot\left[e^{it(A+B)/n}\right]^{n-1-k}\psi.$$

Норма правой части не превосходит

$$|t|\max_{|s|<t}\left\|\left(\frac{t}{n}\right)^{-1}\left(e^{it(A+B)/n}-e^{itA/n}e^{itB/n}\right)e^{is(A+B)}\psi\right\|,$$

а отсюда вытекает, что

$$\left(e^{itA/n}e^{itB/n}\right)^n\psi\xrightarrow{\mathscr{H}}e^{it(A+B)}\psi \text{ при } n\to\infty, \text{ если } \psi\in D.$$

Поскольку D плотно, а операторные экспоненты ограничены единицей, это утверждение справедливо на всем $\mathscr{H}$. ∎

Из этого доказательства видно, что на фиксированном векторе сходимость равномерна по t в некотором компактном подмножестве из $\mathbb{R}$.

Тот же прием можно использовать для демонстрации того, что

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty}\left(e^{-tA/n}e^{-tB/n}\right)^n=e^{-t(A+B)},$$

если A и B удовлетворяют тем же предположениям и вдобавок полуограничены. Следующий результат значительно сильнее, чем теорема VIII.30, поскольку он предполагает лишь самосопряженность *в существенном* оператора $A+B$ на $D(A)\cap D(B)$. Доказательство сильно отличается от доказательства теоремы VIII.30 (литературные ссылки приведены в Замечаниях).

Теорема VIII.31 (формула Троттера для произведения). Если A и B — самосопряженные операторы и $A+B$ в существенном самосопряжен на $D(A)\cap D(B)$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (e^{itA/n}e^{itB/n})^n = e^{i(A+B)t}.$$

Более того, если A и B ограничены снизу, то

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (e^{-tA/n}e^{-tB/n})^n = e^{-t(A+B)}.$$

Приложения формулы Троттера для произведения читатель может найти в § X.10 (фейнмановские интегралы по путям), § X.7 (гиперсжимающие полугруппы) или в гл. XIX (раздел, посвященный конструктивной квантовой теории поля).

VIII.9. Полярное разложение замкнутых операторов

В § VI.4 мы видели, что произвольный ограниченный оператор T может быть представлен как $T=U|T|$, где $|T|$ положителен и самосопряжен, а U частично изометричен. Более того, условие $\operatorname{Ker}|T|=\operatorname{Ker}T$ и требование совпадения начального пространства U с $(\operatorname{Ker}T)^{\perp}$ однозначно определяют $|T|$ и U. В этом разделе мы хотим обобщить этот результат на *замкнутые* неограниченные операторы. Как и в ограниченном случае, U легко построить, как только построен $|T|$, и, как в ограниченном случае, мы положим $|T|=\sqrt{T^*T}$. Раньше трудность состояла в построении квадратного корня. Теперь же у нас есть спектральная теорема, и $\sqrt{T^*T}$ легко построить, если доказать, что T^*T — положительный самосопряженный оператор. Но именно это и представляет основную трудность в неограниченном случае. Заранее не очевидно, что множество $\{\psi\,|\,\psi\in D(T)$ и $T\psi\in D(T^*)\}$ отлично от $\{0\}$. В действительности это множество плотно (задача 45), но наш подход, использующий теорию полуограниченных квадратичных форм, не требует доказательства этого факта.

Теорема VIII.32 (полярное разложение). Пусть T — произвольный замкнутый оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют положительный самосопряженный оператор $|T|$, $D(|T|)=D(T)$, и частично изометрический оператор U с начальным пространством $(\operatorname{Ker}T)^{\perp}$ и конечным пространством $\overline{\operatorname{Ran}T}$, такие, что $T=U|T|$. Операторы $|T|$ и U однозначно определяются этим свойством и дополнительным условием $\operatorname{Ker}(|T|)=\operatorname{Ker}T$.

Доказательство. Определим квадратичную форму s на $D(T)$, полагая $s(\psi,\phi)=(T\psi,T\phi)$. Она, очевидно, положительна. Предположим теперь, что задана такая последовательность $\{\psi_n\}$, что