самосопряжен на $D(A)\cap D(B)$, то

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (e^{itA/n}e^{itB/n})^n = e^{i(A+B)t}.$$

Более того, если A и B ограничены снизу, то

$$\operatorname*{s-lim}_{n\to\infty} (e^{-tA/n}e^{-tB/n})^n = e^{-t(A+B)}.$$

Приложения формулы Троттера для произведения читатель может найти в § X.10 (фейнмановские интегралы по путям), § X.7 (гиперсжимающие полугруппы) или в гл. XIX (раздел, посвященный конструктивной квантовой теории поля).

VIII.9. Полярное разложение замкнутых операторов

В § VI.4 мы видели, что произвольный ограниченный оператор T может быть представлен как $T=U|T|$, где $|T|$ положителен и самосопряжен, а U частично изометричен. Более того, условие $\operatorname{Ker}|T|=\operatorname{Ker}T$ и требование совпадения начального пространства U с $(\operatorname{Ker}T)^\perp$ однозначно определяют $|T|$ и U. В этом разделе мы хотим обобщить этот результат на *замкнутые* неограниченные операторы. Как и в ограниченном случае, U легко построить, как только построен $|T|$, и, как в ограниченном случае, мы положим $|T|=\sqrt{T^*T}$. Раньше трудность состояла в построении квадратного корня. Теперь же у нас есть спектральная теорема, и $\sqrt{T^*T}$ легко построить, если доказать, что T^*T — положительный самосопряженный оператор. Но именно это и представляет основную трудность в неограниченном случае. Заранее не очевидно, что множество $\{\psi\mid\psi\in D(T)$ и $T\psi\in D(T^*)\}$ отлично от $\{0\}$. В действительности это множество плотно (задача 45), но наш подход, использующий теорию полуограниченных квадратичных форм, не требует доказательства этого факта.

Теорема VIII.32 (полярное разложение). Пусть T — произвольный замкнутый оператор на гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Тогда существуют положительный самосопряженный оператор $|T|$, $D(|T|)=D(T)$, и частично изометрический оператор U с начальным пространством $(\operatorname{Ker}T)^\perp$ и конечным пространством $\overline{\operatorname{Ran}T}$, такие, что $T=U|T|$. Операторы $|T|$ и U однозначно определяются этим свойством и дополнительным условием $\operatorname{Ker}(|T|)=\operatorname{Ker}T$.

Доказательство. Определим квадратичную форму s на $D(T)$, полагая $s(\psi,\phi)=(T\psi,T\phi)$. Она, очевидно, положительна. Предположим теперь, что задана такая последовательность $\{\psi_n\}$, что

$\|\psi_n-\psi_m\|_{+1}\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi_m\|\to 0$ и $\|T(\psi_n-\psi_m)\|\to 0$. Поскольку T замкнут, то существует такое $\psi\in D(T)$, что $\|\psi_n-\psi\|+\|T(\psi_n-\psi)\|\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi\|_{+1}\to 0$. Итак, s — замкнутая форма. Следовательно, по теореме VIII.15 существует единственный положительный самосопряженный оператор S, такой, что $Q(S)=D(T)$ и $s(\psi,\phi)=(\psi,S\phi)$ в смысле форм. Пусть $|T|=S^{1/2}$. Тогда $D(|T|)=Q(S)=D(T)$ и по построению $\||T|\psi\|^2=s(\psi,\psi)=\|T\psi\|^2$, так что $\operatorname{Ker}|T|=\operatorname{Ker}T$. Определим U: $\operatorname{Ran}|T|\to\operatorname{Ran}T$ формулой $U|T|\psi=T\psi$. Поскольку $\||T|\psi\|=\|T\psi\|$, оператор U корректно определен и сохраняет норму. Таким образом, U расширяется до частичной изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|T|}$ в $\overline{\operatorname{Ran}T}$. Наконец, в силу самосопряженности $|T|$, $\overline{\operatorname{Ran}|T|}=(\operatorname{Ker}|T|)^{\perp}=(\operatorname{Ker}T)^{\perp}$. Доказательство единствениости мы оставляем читателю (задача 44). ∎

VIII.10. Тензорные произведения

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты теории тензорных произведений операторов в гильбертовых пространствах. Пусть A и B — плотно определенные операторы в гильбертовых пространствах $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$ соответственно. Обозначим через $D(A)\otimes D(B)$ множество конечных линейных комбинаций векторов вида $\phi\otimes\psi$, где $\phi\in D(A)$ и $\psi\in D(B)$. Оно плотно в $\mathcal{H}_1\otimes\mathcal{H}_2$. Зададим $A\otimes B$ на $D(A)\otimes D(B)$ формулой

$$(A\otimes B)(\phi\otimes\psi)=A\phi\otimes B\psi$$

и продолжим его по линейности.

Предложение. Оператор $A\otimes B$ определен корректно. Более того, если A и B замыкаемы, то замыкаем и $A\otimes B$.

Доказательство. Предположим, что $\sum c_i\phi_i\otimes\psi_i$ и $\sum d_j\phi'_j\otimes\psi'_j$ — два представления одного и того же вектора $f\in D(A)\otimes D(B)$. Используя ортогонализацию Грама—Шмидта, получаем базисы $\{\eta_k\}$ и $\{\theta_l\}$ для пространств, натянутых соответственно на $\{\phi_i\}\cup\{\phi'_i\}$ и $\{\psi_j\}\cup\{\psi'_j\}$, причем $\eta_k\in D(A)$ и $\theta_l\in D(B)$. Векторы $\phi_i\otimes\psi_i$ и $\phi'_j\otimes\psi'_j$ можно представить как

$$\phi_i\otimes\psi_i=\sum\alpha^i_{kl}\eta_k\otimes\theta_l,$$

$$\phi'_j\otimes\psi'_j=\sum\beta^j_{kl}\eta_k\otimes\theta_l.$$