$\|\psi_n-\psi_m\|_{+1}\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi_m\|\to 0$ и $\|T(\psi_n-\psi_m)\|\to 0$. Поскольку T замкнут, то существует такое $\psi\in D(T)$, что $\|\psi_n-\psi\|+\|T(\psi_n-\psi)\|\to 0$, т. е. $\|\psi_n-\psi\|_{+1}\to 0$. Итак, s — замкнутая форма. Следовательно, по теореме VIII.15 существует единственный положительный самосопряженный оператор S, такой, что $Q(S)=D(T)$ и $s(\psi, \phi)=(\psi, S\phi)$ в смысле форм. Пусть $|T|=S^{1/2}$. Тогда $D(|T|)=Q(S)=D(T)$ и по построению $\||T|\psi\|^2=s(\psi, \psi)=\|T\psi\|^2$, так что $\operatorname{Ker}|T|=\operatorname{Ker}T$. Определим U: $\operatorname{Ran}|T|\to\operatorname{Ran}T$ формулой $U|T|\psi=T\psi$. Поскольку $\||T|\psi\|=\|T\psi\|$, оператор U корректно определен и сохраняет норму. Таким образом, U расширяется до частичной изометрии из $\overline{\operatorname{Ran}|T|}$ в $\overline{\operatorname{Ran}T}$. Наконец, в силу самосопряженности $|T|$, $\overline{\operatorname{Ran}|T|}=(\operatorname{Ker}|T|)^{\perp}=(\operatorname{Ker}T)^{\perp}$. Доказательство единственности мы оставляем читателю (задача 44). ∎

VIII.10. Тензорные произведения

В этом разделе мы рассматриваем некоторые аспекты теории тензорных произведений операторов в гильбертовых пространствах. Пусть A и B — плотно определенные операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$ соответственно. Обозначим через $D(A)\otimes D(B)$ множество конечных линейных комбинаций векторов вида $\phi\otimes\psi$, где $\phi\in D(A)$ и $\psi\in D(B)$. Оно плотно в $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$. Зададим $A\otimes B$ на $D(A)\otimes D(B)$ формулой

$$(A\otimes B)(\phi\otimes\psi)=A\phi\otimes B\psi$$

и продолжим его по линейности.

Предложение. Оператор $A\otimes B$ определен корректно. Более того, если A и B замыкаемы, то замыкаем и $A\otimes B$.

Доказательство. Предположим, что $\sum c_i\phi_i\otimes\psi_i$ и $\sum d_j\phi'_j\otimes\psi'_j$ — два представления одного и того же вектора $f\in D(A)\otimes D(B)$. Используя ортогонализацию Грама—Шмидта, получаем базисы $\{\eta_k\}$ и $\{\theta_l\}$ для пространств, натянутых соответственно на $\{\phi_i\}\cup\{\phi'_i\}$ и $\{\psi_j\}\cup\{\psi'_j\}$, причем $\eta_k\in D(A)$ и $\theta_l\in D(B)$. Векторы $\phi_i\otimes\psi_i$ и $\phi'_j\otimes\psi'_j$ можно представить как

$$\phi_i\otimes\psi_i=\sum\alpha^i_{kl}\eta_k\otimes\theta_l,$$

$$\phi'_j\otimes\psi'_j=\sum\beta^j_{kl}\eta_k\otimes\theta_l.$$

Поскольку эти два выражения для f дают один и тот же вектор, $\sum_i c_i\alpha^i_{kl}=\sum_j d_j\beta^j_{kl}$ для каждой пары $\langle k, l\rangle$. Отсюда

$$\begin{aligned}(A\otimes B)\sum c_i(\phi_i\otimes\psi_i)&=\sum_{k,l}\Big(\sum_i c_i\alpha^i_{kl}\Big)(A\eta_k\otimes B\theta_l)=\\&=\sum_{k,l}\Big(\sum_j d_j\beta^j_{kl}\Big)(A\eta_k\otimes B\theta_l)=\\&=(A\otimes B)\sum d_j(\phi'_j\otimes\psi'_j),\end{aligned}$$

так что $A\otimes B$ определен корректно.

Если g — произвольный вектор из $D(A^*)\otimes D(B^*)$, то $(A\otimes Bf, g)=(f, A^*\otimes B^*g)$, и поэтому

$$D(A^*)\otimes D(B^*)\subset D((A\otimes B)^*).$$

Если A и B замыкаемы, то $D(A^*)$ и $D(B^*)$ плотны. Следовательно, в этом случае $(A\otimes B)^*$ плотно определен, откуда вытекает замыкаемость $A\otimes B$. ∎

Аналогично, если A и B замыкаемы, то допускает замыкание и оператор $A\otimes I+I\otimes B$, определенный на $D(A)\otimes D(B)$.

Определение. Пусть A и B — замыкаемые операторы в гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Их **тензорное произведение** — это замыкание оператора $A\otimes B$, определенного на $D(A)\otimes D(B)$. Мы будем обозначать замыкание также через $A\otimes B$. Обычно $A+B$ будет обозначать замыкание оператора $A\otimes I+I\otimes B$, определенного на $D(A)\otimes D(B)$.

Предложение. Пусть A и B — ограниченные операторы на гильбертовых пространствах $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$. Тогда $\|A\otimes B\|=\|A\|\|B\|$.

Доказательство. Пусть $\{\phi_k\}$ и $\{\psi_l\}$ — ортонормированные базисы для $\mathscr{H}_1$ и $\mathscr{H}_2$; предположим, что $\sum c_{kl}\phi_k\otimes\psi_l$ — конечная сумма. Тогда

$$\begin{aligned}\|(A\otimes I)\sum c_{kl}(\phi_k\otimes\psi_l)\|^2&=\sum_l\Big\|\sum_k c_{kl}A\phi_k\Big\|^2\leqslant\\&\leqslant\sum_l\|A\|^2\sum_k|c_{kl}|^2=\\&=\|A\|^2\|\sum c_{kl}\phi_k\otimes\psi_l\|^2.\end{aligned}$$

Поскольку множество таких конечных сумм плотно в $\mathscr{H}_1\otimes\mathscr{H}_2$ (§ II.4, предложение 2), получаем, что $\|A\otimes I\|\leqslant\|A\|$. Итак,

$$\|A\otimes B\|\leqslant\|A\otimes I\|\|I\otimes B\|\leqslant\|A\|\|B\|.$$

Обратно, для заданного $\varepsilon>0$ существуют единичные векторы $\phi\in\mathscr{H}_1$, $\psi\in\mathscr{H}_2$, такие, что $\|A\phi\|\geqslant\|A\|-\varepsilon$ и $\|B\psi\|\geqslant\|B\|-\varepsilon$.

Тогда

$$\|(A \otimes B)(\phi \otimes \psi)\| = \|A\phi\| \|B\psi\| \geqslant$$
$$\geqslant \|A\| \|B\| - \varepsilon \|A\| - \varepsilon \|B\| + \varepsilon^2.$$

Так как $\varepsilon > 0$ и произвольно, то $\|A \otimes B\| \geqslant \|A\| \|B\|$, что завершает доказательство. ∎

Отметим, что оба приведенные выше предложения допускают естественное обобщение на произвольное конечное тензорное произведение операторов. Это можно доказать непосредственно или путем использования ассоциативности тензорного произведения гильбертовых пространств.

Вернемся теперь к проблемам самосопряженности и спектра. Пусть $\{A_k\}_{k=1}^N$ — семейство самосопряженных операторов A_k в $\mathscr{H}_k$. Обозначим замыкание $I_1 \otimes \ldots \otimes A_k \otimes \ldots \otimes I_N$ на $D = \otimes D(A_k)$ также через A_k. Пусть $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином степени n_k по x_k с вещественными коэффициентами. Тогда оператор $P(A_1, \ldots, A_N)$ имеет смысл на $\bigotimes_k D(A_k^{n_k})$, так как $D(A_k^{n_k}) \subset D(A_k^l)$ для всех $l \leqslant n_k$. На самом деле P в существенном самосопряжен на этой области.

Теорема VIII.33. Пусть A_k — самосопряженный оператор в $\mathscr{H}_k$. Пусть $P(x_1, \ldots, x_N)$ — полином степени n_k по k-й переменной с вещественными коэффициентами, и пусть D_k^e — область самосопряженности в существенном для $A_k^{n_k}$. Тогда

(a) $P(A_1, \ldots, A_N)$ в существенном самосопряжен на

$$D^e = \bigotimes_{k=1}^{N} D_k^e;$$

(b) спектр $\overline{P(A_1, \ldots, A_N)}$ есть замыкание области значений P на произведении спектров A_k. Иными словами,

$$\sigma(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)}) = \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}.$$

Доказательство. Докажем сначала, что $P(A_1, \ldots, A_N)$ в существенном самосопряжен на $D = \bigotimes_{k=1}^{N} D(A_k^{n_k})$. По спектральной теореме существует пространство с мерой $\langle M_k, \mu_k \rangle$, такое, что A_k унитарно эквивалентен умножению на вещественнозначную измеримую функцию f_k в $L^2(M_k, d\mu_k)$. В силу предложения 3 § VIII.3, можно считать, что μ_k конечна и что $f_k \in \bigcap_{1<p<\infty} L^p(M_k, d\mu_k)$.

Более того, по теореме II.10 (a), $\bigotimes_{k=1}^{N} L^2(M_k, d\mu_k)$ естественно изоморфно $L^2\left(\bigtimes_{k=1}^{N} M_k, \bigotimes_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$. При этом изоморфизме

$P(A_1, \ldots, A_N)$ соответствует умножению на $P(f_1, \ldots, f_N)$, а D соответствует множеству конечных линейных комбинаций функций $\phi_1(m_1)\phi_2(m_2)\ldots\phi_N(m_N)$, таких, что $f_k^{n_k}\phi_k \in L^2(M_k, d\mu_k)$.

Для доказательства самосопряженности в существенном используем предложение 2 § VIII.3. Во-первых, поскольку μ_k конечна и $f_k^{n_k} \in L^p(M_k, d\mu_k)$, имеем $f_k^l \in L^p(M_k, d\mu_k)$ при $1 \leqslant p < \infty$. Отсюда немедленно следует, что $P(f_1, \ldots, f_N)$ лежит в L^p при всех таких p; в частности, $P(f_1, \ldots, f_N) \in L^4\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k, \bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$. Так как оператор умножения на $f_k^{n_k}$ самосопряжен на D_k, то D_k содержит характеристические функции измеримых множеств из M_k. Таким образом, D содержит все конечные линейные комбинации характеристических функций прямоугольников. Замечания о произведениях мер в конце § I.4 показывают, что характеристическая функция любого измеримого множества из $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$ равна такой конечной линейной комбинации с точностью до множества сколь угодно малой $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k$-меры. Итак, простые функции на $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$ могут быть приближены в смысле L^p $(1 \leqslant p < \infty)$ элементами из D. В частности, D плотно в $L^4\left(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k, \bigotimes\limits_{k=1}^{N} d\mu_k\right)$. Самосопряженность в существенном следует теперь из предложения 2 § VIII.3.

Чтобы показать, что P в существенном самосопряжен на D^e, достаточно показать (в силу задачи 14), что $\overline{P \upharpoonright D^e}$ есть расширение $P \upharpoonright D$. Допустим, что $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \phi_k \in D$. Тогда $\phi_k \in D(A_k^{n_k})$, так что, поскольку D_k^e — область самосопряженности в существенном для $A_k^{n_k}$, существует такая последовательность $\{\phi_k^l\}_{l=1}^{\infty}$, что $\phi_k^l \to \phi_k$ и $A_k^{n_k}\phi_k^l \to A_k^{n_k}\phi_k$. Простая оценка показывает, что тогда $A_k^m\phi_k^l \to A_k^m\phi_k$ для всех $1 \leqslant m \leqslant n_k$. Следовательно,

$$\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k^l \to \bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k$$

и

$$P(A_1, \ldots, A_n)\left(\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k^l\right) \to P(A_1, \ldots, A_n)\left(\bigotimes_{k=1}^{N} \phi_k\right).$$

То же рассуждение проходит для конечных линейных комбинаций векторов вида $\bigotimes\limits_{k=1}^{N} \phi_k$, поэтому $\overline{P \upharpoonright D^e}$ расширяет $P \upharpoonright D$. Это завершает доказательство (а).

Чтобы доказать (b), предположим, что $\lambda \in \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}$. Если I — произвольный открытый интервал, содержащий λ, то $P^{-1}(I)$ содержит произведение $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} I_k$ открытых интервалов, таких, что $I_k \cap \sigma(A_k) \neq \varnothing$. Поскольку $\sigma(A_k) = \text{ess range } f_k^{n_k}$, то $\mu_k[(f_k^{n_k})^{-1}(I_k)] \neq 0$, так что

$$\mu[P(f_1, \ldots, f_N)^{-1}(I)] \neq 0.$$

Другими словами, $\lambda \in \text{ess range } P(f_1, \ldots, f_N)$, но $\text{ess range } P(f_1, \ldots, f_N) = \sigma(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)})$, в силу первого предложения из § VIII.3. Обратно, если $\lambda \notin \overline{P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))}$, то $(\lambda - P(f_1, \ldots, f_N))^{-1}$ ограничен п. в. на $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} M_k$, так что $\lambda \in \rho(\overline{P(A_1, \ldots, A_N)})$. ∎

Если $A_1, \ldots, A_N$ ограничены, то $P(\sigma(A_1), \ldots, \sigma(A_N))$ замкнуто, но в общем случае это не так (задача 43). Два наиболее важных частных случая теоремы VIII.33 выделяет такое

Следствие. Пусть $A_1, \ldots, A_N$ — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}_1, \ldots, \mathcal{H}_N$, и пусть D_k — область самосопряженности в существенном для A_k при любом k. Тогда

(a) операторы $A_\Pi = A_1 \otimes \ldots \otimes A_N$ и $A_\Sigma = A_1 + \ldots + A_N$ в существенном самосопряженны на $D = \bigotimes_{k=1}^{N} D_k$;

(b) $\sigma(A_\Pi) = \prod_{k=1}^{N} \sigma(A_k)$ и $\sigma(A_\Sigma) = \sum_{k=1}^{N} \sigma(A_k)$.

Пример 1. Предположим, что $V(x)$ — потенциал, так что $H_1 = -\Delta_x + V(x)$ в существенном самосопряжен на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Тогда $H_2 = (-\Delta_x + V(x)) + (-\Delta_y + V(y))$ в существенном самосопряжен на множестве конечных сумм произведений $\phi(x)\psi(y)$, где $\phi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Кроме того, $\sigma(H_2) = \overline{\sigma(H_1) + \sigma(H_1)}$.

Пример 2 (вторичное квантование свободного гамильтониана). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство, $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ — ассоциированное пространство Фока (см. § II.4). Предположим, что A — самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$ с областью самосопряженности в существенном D. Каждому такому A можно поставить в соответствие оператор $d\Gamma(A)$ на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ следующим образом. Пусть $A^{(n)} = A \otimes I \otimes \ldots \otimes I + I \otimes A \otimes \ldots \otimes I + \ldots + I \otimes \ldots \otimes A$ на $\bigotimes_{k=1}^{n} D$. Пусть $D_A \subset \mathcal{F}(\mathcal{H})$ — множество векторов $\psi = \{\psi_0, \psi_1, \ldots\}$, таких, что $\psi_n = 0$ для достаточно больших n и $\psi_n \in \bigotimes_{k=1}^{n} D$ для каждого n. Множество D_A плотно в $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, так как D плотно в $\mathcal{H}$. Положим $A^{(0)} = 0$ и $d\Gamma(A) = \sum_{n=0}^{\infty} A^{(n)}$. Оператор $d\Gamma(A)$ имеет смысл на D_A и, как легко видеть, симметричен. По теореме VIII.33, $A^{(n)}$ в существенном самосопряжен на $\bigotimes_{k=1}^{n} D$. Таким образом, $A^{(n)} + \mu i$ имеет плотную область значений на $\bigotimes_{k=1}^{n} D$, если $\mu \in \mathbb{R}$ и $\mu \neq 0$. Отсюда немедленно следует, что $d\Gamma(A) \pm i$ имеет плотную область значений на D_A. Итак, $d\Gamma(A)$ в существенном самосопряжен на D_A. Если A — квантовомеханический оператор, соответствующий энергии свободной частицы, то $d\Gamma(A)$ называется *вторично квантованным* оператором энергии свободной частицы. Он коммутирует с проекторами на симметричное и антисимметричное пространства Фока, откуда следует, что $d\Gamma(A) \restriction \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $d\Gamma(A) \restriction \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ в существенном самосопряженны на $D \cap \mathcal{F}_s(\mathcal{H})$ и $D \cap \mathcal{F}_a(\mathcal{H})$ соответственно.

Часть (b) теоремы VIII.33 выполняется и в том случае, когда $A_1, \ldots, A_N$ — произвольные ограниченные операторы. По техническим причинам мы отложим доказательство до гл. XIII, где обсудим также некоторые случаи, когда $A_1, \ldots, A_N$ не ограничены и не самосопряжены.

VIII.11. Три математические проблемы квантовой механики

В этом небольшом разделе мы хотим кратко описать математическую модель квантовой механики и три возникающие здесь математические проблемы.

В Замечаниях мы обсудим возможности «вывода» этой модели из различных аксиоматических схем.

Квантовомеханические системы описываются операторами и векторами в сепарабельных гильбертовых пространствах $\mathcal{H}$. Каждому вектору единичной длины из $\mathcal{H}$ отвечает некоторое физическое состояние. Два таких вектора соответствуют одному и тому же состоянию тогда и только тогда, когда они отличаются лишь комплексным множителем, равным по модулю единице. Каждой наблюдаемой сопоставляется самосопряженный оператор A в $\mathcal{H}$. Если система находится в состоянии φ и мы измеряем наблюдаемую, соответствующую A, то распределение вероятности результатов измерения описывается величиной $d(\varphi, P_\lambda \varphi)$, где P_Ω — проекторнозначная мера, ассоциированная с A. Иными