Если $\varphi \in \mathcal{H}$, $\|\varphi\| = 1$ — состояние системы при $t = 0$, то

$$\int\limits_{x_k=a}^{b} \int\limits_{\mathbb{R}^{3n-1}} |\varphi(x_1, \ldots, z_n)|^2 dx_1 \ldots dz_n$$

— вероятность того, что при $t = 0$ x-координата k-й частицы лежит в интервале (a, b), а

$$\int\limits_{x_k=a}^{b} \int\limits_{\mathbb{R}^{3n-1}} |(U(t_0)\varphi)(x_1, \ldots, z_n)|^2 dx_1 \ldots dz_n$$

— та же вероятность, но при $t = t_0$. Очевидно, что спектральный анализ H и поведение e^{-itH} при больших t — сложные математические проблемы.

Отметим, что эта модель — довольно грубое приближение n-электронного атома в силу ряда причин. Мы не учли спин электронов и принцип запрета Паули. Мы не учли также движение ядра, считая его неподвижным. И наконец, эта модель нерелятивистская.

ЗАМЕЧАНИЯ

§ VIII.1. Развитие теории неограниченных операторов стимулировалось попытками строгого математического обоснования квантовой механики, которые предприинимались в конце 20-х годов. Систематическое изложение теории принадлежит фон Нейману (von Neumann, Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren, *Math. Ann.*, **102** (1929—1930), 49—131) и Стоуну (M. Stone, Linear Transformations in Hilbert Spaces and their Applications to Analysis, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. **15**, New York, 1932). Техника применения графиков для анализа неограниченных операторов была развита фон Нейманом (von Neumann, Über Adjungierte Funktionaloperatoren, *Ann. Math.* (2), **33** (1936), 294—310).

Функция на $[a, b] \subset \mathbb{R}$ называется *абсолютно непрерывной*, если для любого заданного $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i') - f(x_i)| < \varepsilon$$

для любого конечного набора интервалов $[x_i, x_i']$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i| < \delta.$$

Для таких функций справедлива *основная теорема анализа:*

Если f абсолютно непрерывна на $[a, b]$, то f почти всюду дифференцируема, $f'(x) \in L^1[a, b]$ и f — неопределенный интеграл от $f'(x)$. Обратно, если $g(x) \in L^1[a, b]$, то неопределенный интеграл $G(x)$ от $g(x)$ абсолютно непрерывен и $G'(x) = g(x)$ почти всюду.

§ *VIII.2*. Принадлежащая фон Нейману теорема VIII.3 (см. первую из цитированных выше статей) представляет собой частный случай теоремы X.2 и ее следствия. В своей статье фон Нейман приписывает выделение понятия самосопряженности Э. Шмидту. Отметим, что фон Нейман называет симметрические операторы «эрмитовыми», а самосопряженные операторы — «гипермаксимальными эрмитовыми».

§ *VIII.3*. Тот факт, что гильбертово спектральное разложение не проходит для произвольных симметрических операторов, был объяснен в книге Карлемана (Carleman, Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique, Almquist and Wilesells, Uppsala, 1923). Спектральное разложение неограниченных операторов впервые рассматривал фон Нейман, исследуя математические проблемы квантовой теории. Систематические же доказательства появились впервые в указанных выше статьях фон Неймана и Стоуна, а также в работе Ф. Рисса: F. Riesz, Über die linearen Transformation des komplexen Hilbertschen Raumes, *Acta Sci. Math.* (Szeged), 5 (1930—1932), 23—54. Многие идеи спектрального анализа, правда в матричной форме, были высказаны уже в работах Уинтнера.

Теорию интегрирования можно развить и для векторнозначных мер. Далее эту теорию можно применить к проекторнозначной мере, соответствующей произвольному самосопряженному оператору A. В частности, можно доказать, что для любого $\varphi \in D(A)$

$$A\varphi = \int \lambda \, d(P_\lambda \varphi),$$

где интеграл сходится сильно, т. е. суммы Римана — Стильтьеса сходятся к $A\varphi$ по норме. Это сильнее понятия сходимости, использованного в § VIII.3, где интеграл сходился слабо.

§ *VIII.4*. Теорема Стоуна была сформулирована им в статье: Linear Transformations in Hilbert Space, III, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 15 (1929), 198—200, а доказана в статье: On One-Parameter Unitary Groups in Hilbert Space, *Ann. Math.* (2), 33 (1932), 643—648. Теорема VIII.9 была опубликована в работе фон Неймана: Über einen Satz von Herrn M. H. Stone, *Ann. Math.* (2), 33 (1932), 567—573. Приведенное здесь доказательство теоремы Стоуна принадлежит Гордингу и Вайтману (не опубликовано). Идея использовать инвариантность относительно группы для доказательства самосопряженности в существенном принадлежит Нельсону: E. Nelson, Analytic Vectors, *Ann. Math.*, 70 (1959), 572—614.

Пусть G — локально компактная группа Ли, а $U(g)$ — непрерывное унитарное представление G на $\mathscr{H}$, dg — мера Хаара на G. Тогда множество D конечных линейных комбинаций векторов вида

$$\varphi_f = \int_G f(g)\, U(g)\, \varphi\, dg, \qquad \varphi \in \mathscr{H}, \qquad f \in C_0^\infty(G),$$

плотно в областях определения генераторов всех однопараметрических подгрупп группы G, и эти генераторы отображают D в себя. Это утверждение принадлежит Гордингу: L. Gårding, Notes on Continuous Representations of Lie Groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 33 (1947), 331—332, а D часто называют «областью Гординга». Существование области Гординга очень важно потому, что это позволяет строить представления алгебры Ли группы G на D.

§ *VIII.5*. Пример Нельсона не опубликован, но похожий пример содержится в его цитированной выше статье «Analytic Vectors». Нельсон доказал также, что если A и B — симметрические операторы, D — плотная область, содержащаяся в $D(A) \cap D(B)$ и инвариантная относительно A и B, $AB\varphi - BA\varphi = 0$ для $\varphi \in D$ и сумма $A^2 + B^2$ в существенном самосопряженна на D, то A и B

также в существенном самосопряженны на D и их замыкания коммутируют. Первоначальное доказательство теоремы VIII.14 можно найти в статье: J. von Neumann, Die Eindeutigkeit der Schrödingerschen Operatoren, *Math. Ann.*, **104** (1931), 570—578. Более современное доказательство содержится в работе: Kastler, The C^*-Algebra of a Free Boson Field, I, *Commun. Math. Phys.*, **1** (1965), 14—48. Соотношения Вейля были введены в работе: H. Weyl, Quantenmechanik und Gruppentheorie, *Z. Phys.*, **46** (1927), 1—46. Мы доказываем теорему VIII.14 в гл. XIV (см. также задачу 30 гл. X).

Относительно обращения следствия теоремы VIII.14 известно, что если P и Q симметричны на D и выполнены условия (a) и (b) и вдобавок сумма P^2+Q^2 в существенном самосопряженна на D, то P и Q в существенном самосопряженны на D, а группы удовлетворяют соотношениям Вейля. Доказательство и обсуждение обобщения этого утверждения на случай n степеней свободы приведено в работе Диксмье: J. Dixmier, Sur la Relation $i(PQ-QP)=I$, *Compos. Math.*, **13** (1956), 263—269. Интересна также статья: B. Fuglede, On the Relation $PQ-QP=iI$, *Math. Scand.*, **20** (1967), 79—88.

§ VIII.6. Спектральная теория для ограниченных операторов первоначально строилась в терминах квадратичных форм. Интересный исторический факт состоит в том, что простые свойства полуограниченных квадратичных форм не были по-настоящему оценены до тех пор, пока (двадцать пять лет спустя) путем применения операторов вместо форм спектральная теория не была распространена на неограниченный случай. Мысль о связи форм и операторов неявно содержится в работе Фридрихса, обсуждаемой в замечаниях к § X.3 (особенно в доказательстве Фрейденталя), но теорема о расширении по Фридрихсу до 1950 г. всегда формулировалась на языке операторов. В пятидесятые годы теоремы VIII.15 и VIII.16 независимо обсуждали и открывали многие авторы; см., в частности: P. Lax, A. Milgram, Parabolic Equations, *Ann. Math. Study*, **33** (1954), 167—190; T. Kato, Quadratic forms in Hilbert spaces and asymptotic perturbation series, Tech. Rep. No.9, Univ. of Calif., 1955; J. Lions, Équations différentielles opérationnelles et problèmes aux limites, Springer, New York, 1961. На исследование и доказательство теоремы VIII.15 в терминах шкалы пространств указывал Нельсон (более подробное обсуждение см., например, в книге: E. Nelson, Topics in Dynamics, v.I, Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970). Исчерпывающее исследование квадратичных форм проводится также в гл. 6 монографии Т. Като, Теория возмущений линейных операторов, «Мир», М., 1972, и в гл. 12 книги: M. Schechter, Principles of Functional Analysis, Academic Press, New York and London, 1971.

Термин «аккретивный» впервые появился в статье: K. Friedrichs, Symmetric Positive Linear Differential Equations, *Comm. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418, в какой-то мере как шутка, но был подхвачен. Первоначально он относился к операторам, удовлетворяющим условию $\mathrm{Re}(u, Au)\geqslant 0$ для всех $u\in D(A)$. Изучать такие операторы начал, по существу, Филлипс в работе: R. S. Phillips, Perturbation Theory for Semigroups of Linear Operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 74 (1954), 199—221. (Филлипс изучал диссипативные операторы, т. е. такие операторы A, что $\mathrm{Re}(u, Au)\leqslant 0$ для всех $u\in D(A)$). Понятие «секториальный» использовалось в случаях, когда выполнялось условие $\{(u, Au)\}\subset\{z \mid |\arg(z-w)|<\theta\}$ для некоторого w и некоторого $\theta<\pi/2$. Эти определения часто переносят на формы, т. е. те формы, которые мы назвали строго аккретивными, часто называют секториальными. Поскольку в приложениях часто встречаются повернутые и сдвинутые секторы, мы ввели понятие «строго аккретивный» и обобщили понятие «секториальный».

m-аккретивные операторы — это максимальные аккретивные операторы в том же смысле, в каком самосопряженные операторы суть максимальные симметрические операторы. К этому вопросу мы вернемся в § X.6.

§ VIII.7. Дополнительное обсуждение большей части материала этого раздела читатель может найти в цитированной выше книге Като.

Понятие равномерной резольвентной сходимости определяется сужением на самосопряженные операторы естественной топологии на множестве замкнутых операторов из одного банахова пространства в другое. С. Г. Крейн с соавторами ввели в сороковых годах естественную метрику на замкнутых подпространствах банахова пространства. Именно, для заданных M и N в банаховом пространстве X положим по определению

$$d(M, N) = \sup_{u \in M,\ \|u\|=1} \left(\inf_{v \in N,\ \|v\|=1} \|u-v\| \right).$$

Тогда $M \subset N$ в том и только в том случае, когда $d(M, N)=0$. Если $\hat{d}(M, N) = \max[d(M, N), d(N, M)]$, то $\hat{d}$ — метрика на всех замкнутых подпространствах. Если $\Gamma(T)$ — график T, то можно ввести метрику на всех замкнутых операторах из X в Y, полагая $\rho(T, S) = \hat{d}(\Gamma(T), \Gamma(S))$, где, скажем, $\| \langle x, y \rangle \|_{X \times Y} = \|x\|_X + \|y\|_Y$. Так получается топология на замкнутых операторах, впервые введенная в работе: J. Newburgh, A Topology for Closed Operators, *Ann. Math.*, **53** (1951), 250—255. Ее сужение на самосопряженные операторы как раз и дает топологию равномерной резольвентной сходимости.

Теоремы VIII.21 и VIII.22 наиболее естественно формулируются в терминах теории полугрупп операторов на произвольных банаховых пространствах. Теорема VIII.21 впервые, видимо, была явно доказана (на общем языке полугрупп) в работе: H. Trotter, Approximation of Semigroups of Operators, *Pacific J. Math.*, 8 (1959), 887—919; «в фольклоре» она в то время уже была известна. Теорема VIII.22 тоже была доказана Троттером в той же статье, но один момент его доказательства уточнил Т. Като: T. Kato, Remarks on Pseudo-resolvents and Infinitesimal Generators of Semigroups, *Proc. Jap. Acad.*, **35** (1959), 467—468. Теорему VIII.21 иногда называют теоремой Троттера — Като. Обсуждение равномерной и сильной сходимости операторов, не обязательно самосопряженных, см. в книге Като: § 2 гл. IV (равномерная сходимость) и § 1 и 3 гл. VIII (сильная сходимость).

Теоремы типа VIII.23 и VIII.24 впервые были доказаны Ф. Реллихом (F. Rellich, Störungstheorie der Spektralzerlegung, II, *Math. Ann.*, **113** (1936), 667—685). Обобщение результатов Реллиха появилось в статьях: B. Sz.-Nagy, Perturbations des transformations autoadjointes dans l'espace de Hilbert, *Comm. Math. Helv.*, **19** (1946—1947), 347—366; E. Heinz, Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung, *Math. Ann.*, **123** (1951), 415—438.

Систематическое изучение граф-пределов было начато в работе: J. Glimm and A. Jaffe, Singular Perturbations of Self-adjoint Operators, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 401—414. Мы вернемся к их идеям в § X.8.

§ VIII.8. Распространение теоремы Ли на бесконечномерный случай впервые было выполнено Троттером: H. Trotter, On the Product of Semigroups of Operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **10** (1959), 545—551. Он доказал теорему VIII.31 для полугрупп на банаховом пространстве. Позднее его доказательство упростил Чернов (P. R. Chernoff, Note on Product Formulas for Operator Semigroups, *J. Funct. Anal.*, 2 (1968), 238—242).

Приведенное доказательство теоремы VIII.30 дано Нельсоном: E. Nelson, Feynman Integrals and the Schrödinger Equation, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 332—343.

Обобщения формулы Троттера на различные специальные случаи, когда сумма $A+B$ не есть в существенном самосопряженный оператор, а определена как сумма форм, даны в работах: W. Faris, The Product Formula for Semigroups Defined by Friedrichs Extensions, *Pacific J. Math.*, **22** (1967), 47—70; P. R. Chernoff, Semigroup Product Formulas and Addition of Unbounded Operators, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 395.

§ VIII.10. Первое математически строгое построение вторичного квантования можно найти в работе: J. Cook, The Mathematics of Second Quantization,

Trans. Amer. Math. Soc., 74 (1953), 222—245. Для более полной информации по этому поводу см. I. Segal, Tensor Algebras over Hilbert Spaces, I, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 81 (1956), 106—134.

Обозначение $d\Gamma$ возникает следующим образом. Множество $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ естественным образом превращается в алгебру относительно умножения

$$(\psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_n)\cdot(\psi_{n+1} \otimes \cdots \otimes \psi_{n+k}) = \psi_1 \otimes \cdots \otimes \psi_{n+k}.$$

Обозначим это умножение символом $\otimes$. Итак, $\psi \otimes \phi$ определено для всех $\psi, \phi \in \mathcal{F}(\mathcal{H})$. Естественными автоморфизмами $\mathcal{F}(\mathcal{H})$ являются обратимые линейные сохраняющие норму отображения V, обладающие свойством $V(\psi \otimes \phi) = V\psi \otimes V\phi$. Естественными же автоморфизмами $\mathcal{H}$ являются как раз унитарные преобразования. Каждому унитарному оператору U однозначно сопоставляется автоморфизм $\Gamma(U)$ на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, если положить $\Gamma(U) = U$ на $\mathcal{H}$ и потребовать, чтобы $\Gamma(U) = U \otimes \ldots \otimes U$ (n раз) на $\mathcal{H}^n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathcal{H}$. Итак, Γ отображает группу унитарных преобразований $\mathcal{H}$ в группу автоморфизмов $\mathcal{F}(\mathcal{H})$, причем это отображение сильно непрерывно. Тогда $d\Gamma$ определяется требованием $e^{it d\Gamma(A)} = \Gamma(e^{itA})$, т. е. $d\Gamma(A)$ для любого самосопряженного A в $\mathcal{H}$ есть инфинитезимальный генератор сильно непрерывной унитарной группы $\Gamma(e^{itA})$. На языке теории Ли $d\Gamma$ — дифференциал Γ, рассматриваемого как отображение «алгебры Ли» группы унитарных операторов на $\mathcal{H}$ в алгебру Ли группы унитарных операторов на $\mathcal{F}(\mathcal{H})$. Доказательство того, что так определенный оператор $d\Gamma$ совпадает с замыканием $d\Gamma$, определенного в § VIII.10,— несложное упражнение.

В обычных «физических» обозначениях если $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R}^3, dx)$ и A определен так, что $(Af)(x) = \omega(x) f(x)$, то $d\Gamma(A)$ есть именно то, что записывается как $\int \omega(x) a^*(x) a(x)\, dx$.

Доказательство теоремы VIII.33 показывает, как спектральная теорема позволяет использовать L^p-технику при решении задач в абстрактных гильбертовых пространствах. С помощью спектральной теоремы часто удается сформулировать данную задачу в терминах $L^2(M, d\mu)$ для некоторого подходящего пространства с мерой $\langle M, \mu \rangle$. А после того, как это сделано, часто можно воспользоваться стандартными теоремами и оценками L^p-теории.

§ VIII.11. Попытки априорного обоснования рассматриваемой нами квантовомеханической картины восходят к знаменитой монографии фон Неймана 1932 г. (Математические основы квантовой механики, «Наука», М., 1964). Подход Дж. Макки (Лекции по математическим основам квантовой механики, «Мир», М., 1965, и G. Mackey, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics, Benjamin, New York, 1968) подчеркивает аналогию с классической статистической механикой и выделяет специальные постулаты любого аксиоматического подхода к квантовой механике.

Макки предлагает следующую картину классической статистической механики. Основные состояния классической механической системы суть точки в «фазовом пространстве» M. Статистические состояния — не что иное, как меры на M с единичной полной массой, а наблюдаемые — измеримые функции на M. Для заданного состояния μ и наблюдаемой f мера $\nu_{\mu,f}$ на $\mathbb{R}$, определенная как $\nu_{\mu,f}(\Omega) = \mu(f^{-1}(\Omega))$, представляет собой вероятность того, что измерение f дает значение, лежащее в Ω. Первое замечание Макки состоит в том, что точки M на самом деле не участвуют в излагаемой схеме. Скорее в качестве основного объекта в теорию входит семейство $\mathfrak{L}$ борелевых множеств. Состояния μ в действительности являются функциями на $\mathfrak{L}$, а для построения $\nu_{\mu,f}$ необходима лишь функция f^{-1}, отображающая борелевы множества из $\mathbb{R}$ в $\mathfrak{L}$. Для того чтобы $\nu_{\mu,f}$ была вероятностной мерой (т. е. чтобы ее полная масса равнялась 1) на $\mathbb{R}$, нужно, чтобы абстрактная структура на $\mathfrak{L}$ удовлетворяла следующим условиям:

(i) на $\mathfrak{L}$ задано частичное упорядочение $\leqslant$ ($A \leqslant B$, если A — подмножество B) с наибольшим элементом 1 (у нас $M=1$) и наименьшим элементом 0 (у нас $\varnothing=0$);

(ii) в $\mathfrak{L}$ задана операция дополнения $'$ ($A' = M \setminus A$) с такими свойствами: $(A')' = A$; $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $B' \leqslant A'$; $1' = 0$;

(iii) $\mathfrak{L}$ есть σ-решетка, т. е. для заданных $A_1, \ldots, A_n, \ldots \in \mathfrak{L}$ существует такое

$$A = \bigvee_{n=1}^{\infty} A_n,$$

что $A \geqslant A_n$ при всех n и $A \leqslant B$, если $B \geqslant A_n$ при всех n;

(iv) структура σ-решетки и операция дополнения связаны условием $A \vee A' = 1$.

Абстрактное множество $\mathfrak{L}$ со свойствами (i)—(iv) называется **решеткой с ортодополнением**. Коль скоро такой объект задан, элементы $A, B \in \mathfrak{L}$ называются *дизъюнктными*, если $A \leqslant B'$. *Мера на* $\mathfrak{L}$ — это такое отображение μ: $\mathfrak{L} \to \mathbb{R}^+ = \{a \in \mathbb{R} \mid a \geqslant 0\}$, что $\mu(1) = 1$ и

$$\mu\left(\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n),$$

если A_i и A_j дизъюнктны при всех i и j; *$\mathfrak{L}$-значная мера* — это такое отображение P: $\mathscr{B} \to \mathfrak{L}$, где $\mathscr{B}$ — семейство борелевых множеств из $\mathbb{R}$, что $P(\mathbb{R}) = 1$,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \bigvee_{i=1}^{\infty} A_i$$

и $P(\mathbb{R} \setminus A) = P(A')$.

Итак, предложенное Макки описание классической статистической механики приводит к абстрактному понятию *статистической системы* как решетки с ортодополнением. Наблюдаемые оказываются тогда $\mathfrak{L}$-значными мерами, а состояния — мерами на $\mathfrak{L}$. Для заданного состояния μ и наблюдаемой θ борелева мера

$$\nu_{\mu,\,\theta}(\Omega) = \mu(\theta(\Omega))$$

на $\mathbb{R}$ интерпретируется как вероятность того, что измерение наблюдаемой θ в состоянии μ даст величину, лежащую в Ω.

В первой из указанных работ Макки имеется описание набора разумных аксиом для понятия «измерения» в статистической системе, которое приводит к решеткам с ортодополнением. Чтобы получить квантовую механику, к основной схеме необходимо добавить следующий *специальный постулат*: $\mathfrak{L}$ является семейством $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ замкнутых подпространств сепарабельного гильбертова пространства $\mathscr{H}$ с операциями: $A \leqslant B$ тогда и только тогда, когда $A \subseteq B$; $A' = A^{\perp}$ и $\bigvee_{n=1}^{\infty} A_n = \sum_{n=1}^{\infty} A_n$; $1 = \mathscr{H}$; $0 = \{0\}$. Таким образом, возникает задача обосновать этот постулат. Важный шаг в этом направлении совершил Пирон (C. Piron, Axiomatique Quantique, *Helv. Phys. Acta*, 37 (1964), 439—468). См. также обсуждение этой проблемы в упоминаемой ниже монографии Яуха.

После того как такой специальный постулат принят, состояния и наблюдаемые можно построить в более явной форме. Глисон (A. Gleason, Measures on the Closed Subspaces of a Hilbert Space, *J. Math. Mech.*, 6 (1957), 885—894) доказал, что каждая мера на $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ может быть получена следующим образом. Каждому подпространству $A \in \mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ естественно соответствует ортогональный проектор P, такой, что $\operatorname{Ran} P = A$. Глисон доказал, что каждая мера μ на $\mathfrak{L}_{\mathscr{H}}$ представима в виде $\mu(A) = \operatorname{tr}(\rho P)$, где ρ — некоторый положительный оператор со следом $\operatorname{tr} \rho = 1$. В силу теорем VI.17 и VI.21, существует ортонормированный базис $\{\Phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и такие $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots \geqslant 0$, $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1$, что $\rho = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n (\Phi_n, \cdot)\, \Phi_n$. Итак, произвольные состояния суть не что иное, как суммы *векторных состояний*, т. е. состояний вида $\mu(P) = (\Phi_n, P\Phi_n)$ (на языке § XVI.1 эти векторные состояния суть экстремальные точки семейства всех состояний). В результате все состояния можно изучать, рассматривая лишь векторные состояния.

$\mathfrak{L}_{\mathcal{H}}$-значные меры — это в точности проекторнозначные меры! Итак, в соответствии со спектральной теоремой (теоремой VIII.6), всякой наблюдаемой естественным образом сопоставляется самосопряженный оператор A. Вероятность получить значение из Ω при измерении A в векторном состоянии ψ как раз и есть $(\psi, P_\Omega \psi)$, где P_Ω — проекторнозначная мера оператора A.

Отсюда видно, как основные компоненты схемы § VIII.11 появляются на основе специального постулата. Динамическая картина выявляется в результате следующего анализа.

(1) Для каждого момента времени t на множестве всех состояний должно быть задано отображение α_t, переводящее состояние в момент s в состояние в момент $s+t$. Поскольку $\alpha_t \alpha_{-t} = \alpha_0 = I$, каждое α_t должно быть биекцией. Более того, $\alpha(\rho_1 + \rho_2)$ должно равняться $\alpha(\rho_1) + \alpha(\rho_2)$.

(2) Поскольку любое состояние есть сумма векторных состояний, необходимо знать поведение α лишь на векторных состояниях. Последние однозначно определяются свойством экстремальности, поэтому, в силу обратимости, α должно переводить векторные состояния в векторные же состояния. Итак, α — отображение единичных лучей (т. е. семейств векторов вида $\{e^{i\theta}\psi \mid \theta \in [0, 2\pi]\}$) в себя. Оно не вполне произвольно, поскольку существуют векторные состояния $\rho_{\Phi_1}, \ldots, \rho_{\Phi_4}$, такие, что

$${}^1/_2\rho_{\Phi_1} + {}^1/_2\rho_{\Phi_2} = {}^1/_2\rho_{\Phi_3} + {}^1/_2\rho_{\Phi_4},$$

и необходимо, чтобы

$$ {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_1)} + {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_2)} = {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_3)} + {}^1/_2\rho_{\alpha(\Phi_4)}.$$

Например, если Φ_1 и Φ_2 ортогональны и

$$\Phi_3 = 2^{-1/2}(\Phi_1 + \Phi_2), \quad \Phi_4 = 2^{-1/2}(\Phi_1 - \Phi_2),$$

то на основе предыдущего можно заключить, что $\alpha(\Phi_1)$ ортогонально $\alpha(\Phi_2)$. В общем случае доказывается, что отображение на лучах порождает автоморфизм всех состояний тогда и только тогда, когда $|(\alpha(\Phi_1), \alpha(\Phi_2))| = |(\Phi_1, \Phi_2)|$ для всех единичных лучей Φ_1, Φ_2.

(3) Исследование Е. Вигнера, изложенное в его книге «Теория групп и ее приложения к квантовомеханической теории атомных спектров», ИЛ, М., 1961 [см. также V. Bargmann, Note on Wigner's Theorem on Symmetry Operations, *J. Math. Phys.*, **5** (1964), 862—868] использует построения пункта (2) для доказательства того, что каждый автоморфизм лучей имеет вид $\alpha(\Phi) = U\Phi$, где U унитарен или антиунитарен. С точностью до изменения общего фазового множителя $U \longrightarrow e^{i\theta}U$, α однозначно определяет U.

(4) В силу равенства $\alpha_t = (\alpha_{t/2})^2$, оператор U_t из п. (3) должен быть унитарным. Естественно предполагать, что $t \mapsto \alpha_t(\rho)$ непрерывно. Тогда, согласно одной теореме Баргмана и Вигнера [V. Bargmann, On the Unitary Ray Representations of Continuous Groups, *Ann. Math.*, **59** (1954), 1—46; E. Wigner, Unitary Representations of the Inhomogeneous Lorentz Group, *Ann. Math.*, **40** (1939), 149—204], фазы, оставшиеся в п. (3) произвольными, можно выбрать так, чтобы U_t был сильно непрерывным по t.

(5) Поскольку $\alpha_t \alpha_s = \alpha_{t+s}$, можно заключить, что $U_t U_s = \lambda(t, s)\, U_{t+s}$, причем $|\lambda(t, s)| = 1$. (Несмотря на ограничения п. (4), некий произвол в вы-

боре фазовых множителей еще остается.) Из дальнейшего анализа, проведенного Баргманом и Вигнером (см. цитированные выше работы), следует, что $\lambda(t, s) = \mu(t+s)\mu(t)^{-1}\mu(s)^{-1}$, где μ — некоторая измеримая функция, $|\mu(t)| = 1$. Полагая $V(t) = \mu(t) U_t$, получаем сильно непрерывную однопараметрическую группу унитарных операторов, которую теперь можно исследовать с помощью теоремы Стоуна так, как было указано при обсуждении этой теоремы.

Существует еще один элемент данной картины, который можно обосновать в рамках более фундаментальных предположений. Мы имеем в виду конкретную реализацию $\mathcal{H}$ в виде $L^2(\mathbb{R}^n)$ с $p = i^{-1}\partial/\partial x$ и т. д. и свободным гамильтонианом $H_0 = -(2m)^{-1}\Delta$. Такая реализация $\mathcal{H}$ связана, конечно, с теоремой фон Неймана о единственности решений канонических коммутационных соотношений в конечномерном случае (см. § VIII.5). На более фундаментальном уровне это связано с евклидовой инвариантностью (симметрия относительно пространственных сдвигов и вращений) и операторами координаты. Обсуждение этих фактов содержится во второй из указанных работ Макки, а также в статье: A. Wightman, On the Localizability of Quantum Mechanical Systems, *Rev. Mod. Phys.*, **34** (1962), 845—872. Тот факт, что $H_0 = -(2m)^{-1}\Delta$, связан с галилеевой инвариантностью, как показано во второй работе Макки и статье Баргмана в *Ann. Math.* (см. выше), а также в статьях: E. Inönü, E. Wigner, Representations of the Galilei Group, *Nuovo Cimento*, **9** (1952), 705—718; C. Piron, Sur le quantification du système de deux particules, *Helv. Phys. Acta*, **38** (1965), 104—108.

Мы только что детально обсудили один из возможных подходов к квантовой аксиоматике. Дополнительное обсуждение, а также другие подходы можно найти в следующих работах: G. Birkhoff, J. von Neumann, The Logic of Quantum Mechanics, *Ann. Math.*, 37 (1936), 823—843; G. Dahn, Attempt of an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and More General Theories, IV, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 192—211; E. B. Davies, Quantum Stochastic Processes, *Commun. Math. Phys.*, **15** (1969), 277—304; E. B. Davies, J. T. Lewis, An Operational Approach to Quantum Probability, *Commun. Math. Phys.*, **17** (1970), 239—260; C. M. Edwards, The Operational Approach to Algebraic Quantum Theory, I, *Commun. Math. Phys.*, **16** (1970), 207—230; J. Gunson, On the Algebraic Structure of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **6** (1967), 262—285; K. E. Hellwig, K. Kraus, Operations and Measurements, I, II, *Commun. Math. Phys.*, **11** (1969), 214—220; **16** (1970), 142—147; J. Jauch, Foundations of Quantum Mechanics, Addison-Wesley, Reading, Massachusetts, 1968; P. Jordan, J. von Neumann, E. Wigner, On the Algebraic Generalization of the Quantum Mechanical Formalism, *Ann. Math.*, **35** (1934), 29—64; G. Ludwig, Attempt at an Axiomatic Foundation of Quantum Mechanics and more General Theories, I—III, *Z. Phys.*, **181** (1964), 223—260; *Commun. Math. Phys.*, **4** (1967), 331—348; **9** (1968), 1—12; B. Mielnik, Geometry of Quantum States, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 55—80; R. J. Plymen, A Modification of Piron's Axioms, *Helv. Phys. Acta*, **41** (1968), 69—74; R. J. Plymen, C^*-Algebras and Mackey's Axioms, *Commun. Math. Phys.*, **8** (1968), 132—146; J. Pool, Baer *-Semigroups and the Logic of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 118—141; J. Pool, Semimodularity and the Logic of Quantum Mechanics, *Commun. Math. Phys.*, **9** (1968), 212—228; E. Prugovečki, Quantum Mechanics in Hilbert Spaces, Academic Press, New York, 1971; I. Segal, Postulates for General Quantum Mechanics, *Ann. Math.*, **48** (1947), 930—940; V. Varadarajan, Geometry of Quantum Theory, Van Nostrand — Reinhold, Princeton, N. J., 1968; H. Weyl, The Theory of Groups and Quantum Mechanics, Dover, New York, 1931; N. Zierler, Axioms for Non-relativistic Quantum Mechanics, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1151—1169.

Несмотря на огромное количество литературы по поводу этих «изначальных» основ квантовой теории, окончательная форма квантовой аксиоматики отсутствует. Вероятно, наиболее важным результатом попыток аксиоматизировать квантовую теорию следует считать наметившийся выход из аксиоматического круговорота: теория неограниченных самосопряженных операторов, йордановы алгебры и подход к квантовой теории при помощи C^*-алгебр (рассматриваемый в гл. XIX и XX) — выросли из этих попыток.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathcal{H}$, и пусть e_∞ — вектор из $\mathcal{H}$, не являющийся конечной линейной комбинацией векторов φ_n. Пусть D — множество конечных линейных комбинаций элементов $\{\varphi_n\}$ и e_∞; зададим на D оператор

$$T\left(be_\infty + \sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right) = be_\infty.$$

Покажите, что $\overline{\Gamma(T)}$ содержит как $\langle e_\infty, e_\infty\rangle$, так и $\langle e_\infty, 0\rangle$, и, следовательно, не является графиком линейного оператора.

2. Пусть S — инъективный оператор из $D(S)$ в $\mathcal{H}$. Рассмотрим следующие дополнительные утверждения об S:

(1) S — замкнутый оператор;
(2) множество $\operatorname{Ran} S$ плотно;
(3) множество $\operatorname{Ran} S$ замкнуто;
(4) для некоторой константы C и всех $\psi \in D(S)$: $\|S\psi\| \geqslant C\|\psi\|$.

(a) Докажите, что из (1)—(3) следует (4). *Указание*: примените теорему о замкнутом графике к S^{-1}.
(b) Докажите, что из (2)—(4) следует (1).
(c) Докажите, что из (1) и (4) следует (3).

Замечание. Пусть T — замкнутый оператор. Применяя (a) к $\lambda - T$, видим, что $\lambda \in \rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\lambda - T$ — биекция; (b) также можно «перевести» подобным образом.

†*3.* Докажите, что операторы в примере 5 § VIII.1 замкнуты.

4. (a) Предположим, что C — симметрический оператор, $C \supset A$ и что $\operatorname{Ran}(A+i) = \operatorname{Ran}(C+i)$. Докажите, что $C = A$.
(b) Предположим, что A — симметрический оператор, такой, что $\operatorname{Ran}(A+i) = \mathcal{H}$, но $\operatorname{Ran}(A-i) \neq \mathcal{H}$. Докажите, что A не имеет самосопряженных расширений.

5. Пусть $\mathcal{H} = l_2$. Пусть $D(A) = \{a \in \mathcal{H} \mid$ существует такое N, что $\sum_{m=0}^{N} a_n = 0$ и $a_n = 0$ при $n > N\}$. Для $a \in D(A)$ определим $Aa \in \mathcal{H}$, полагая

$$(Aa)_n = i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m + \sum_{m=0}^{n} a_m\right).$$

(a) Докажите, что $D(A)$ плотно в $\mathcal{H}$.

(b) Докажите, что A симметричен. *Указание*: если $\sum_{m=0}^{N} a_m = 0$, то

$$(Aa)_n = i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m - \sum_{m=n+1}^{N} a_m\right).$$

(c) Докажите, что множество $\operatorname{Ran}(A+i)$ плотно в l_2.
(d) Докажите, что $(1, 0, 0, \ldots) \in D(A^*)$ и $(A^*+i)(1, 0, 0, \ldots) = 0$.