ского круговорота: теория неограннченных самосопряженных операторов, йордановы алгебры и подход к квантовой теории при помощи C^*-алгебр (рассматриваемый в гл. XIX и XX)—выросли из этих попыток.

ЗАДАЧИ

1. Пусть $\{\varphi_n\}$—ортонормированный базис гильбертова пространства $\mathscr{H}$, и пусть e_∞—вектор из $\mathscr{H}$, не являющийся конечной линейной комбинацией векторов φ_n. Пусть D—множество конечных линейных комбинаций элементов $\{\varphi_n\}$ и e_∞; зададим на D оператор

$$T\left(be_\infty+\sum_{i=1}^{N} c_i\varphi_i\right)=be_\infty.$$

Покажнте, что $\overline{\Gamma(T)}$ содержит как $\langle e_\infty, e_\infty\rangle$, так и $\langle e_\infty, 0\rangle$, н, следовательно, ие является графиком лииейиого оператора.

2. Пусть S—иињективный оператор из $D(S)$ в $\mathscr{H}$. Рассмотрим следующие дополнительиые утверждения об S:
(1) S—замкнутый оператор;
(2) множество $\operatorname{Ran} S$ плотно;
(3) множество $\operatorname{Ran} S$ замкнуто;
(4) для некоторой константы C и всех $\psi\in D(S)$: $\|S\psi\|\geqslant C\|\psi\|$.
(a) Докажите, что нз (1)—(3) следует (4). *Указание*: применнте теорему о замкнутом графике к S^{-1}.
(b) Докажите, что из (2)—(4) следует (1).
(c) Докажите, что из (1) и (4) следует (3).
Замечание. Пусть T—замкнутый оператор. Применяя (a) к $\lambda-T$, видим, что $\lambda\in\rho(T)$ тогда и только тогда, когда $\lambda-T$—биекция; (b) также можно «перевести» подобным образом.

†*3.* Докажнте, что операторы в прнмере 5 § VIII.1 замкнуты.

4. (a) Предположим, что C—симметрический оператор, $C\supset A$ и что $\operatorname{Ran}(A+i)=\operatorname{Ran}(C+i)$. Докажите, что $C=A$.
(b) Предположим, что A—симметрнческий оператор, такой, что $\operatorname{Ran}(A+i)=\mathscr{H}$, но $\operatorname{Ran}(A-i)\neq\mathscr{H}$. Докажнте, что A не имеет самосопряженных расширений.

5. Пусть $\mathscr{H}=l_2$. Пусть $D(A)=\{a\in\mathscr{H}\mid$ существует такое N, что $\sum_{m=0}^{N} a_n=0$ и $a_n=0$ при $n>N\}$. Для $a\in D(A)$ определим $Aa\in\mathscr{H}$, полагая

$$(Aa)_n=i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m+\sum_{m=0}^{n} a_m\right).$$

(a) Докажите, что $D(A)$ плотно в $\mathscr{H}$.
(b) Докажнте, что A симметричен. *Указание*: если $\sum_{m=0}^{N} a_m=0$, то

$$(Aa)_n=i\left(\sum_{m=0}^{n-1} a_m-\sum_{m=n+1}^{N} a_m\right).$$

(c) Докажите, что множество $\operatorname{Ran}(A+i)$ плотно в l_2.
(d) Докажите, что $(1, 0, 0, \ldots)\in D(A^*)$ и $(A^*+i)(1, 0, 0, \ldots)=0$.

(e) Докажите, что A не имеет самосопряженных расширений. [*Указание*: примените задачу 4 (b) к $\bar{A}$.]

†*6.* Докажите, что оператор T в примере § VIII.2 замкнут.

†*7.* Докажите, что операторы T_α в примере § VIII.2 самосопряженны. [*Указание*: это следует из уже доказанного факта, что если $\psi \in D(T_\alpha^*)$, то $\psi \in AC[0, 1]$ и $T_\alpha^*\psi = i\, d\psi/dx$.]

8. Рассмотрите $T = -d^2/dx^2$ как оператор в $L^2(\mathbb{R})$ с областью определения $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Какой оператор сопряжен к T? Является ли T в существенном самосопряженным?

9. Рассмотрите $T = i\, d/dx$ как оператор в $L^2(0, \infty)$ с областью определения $C_0^\infty(0, \infty)$—множеством бесконечно дифференцируемых функций с компактным носителем, не содержащим нуля. Самосопряжен ли T в существенном?

10. Предположим, что A—плотно определенный симметрический оператор, который к тому же положителен, т. е. $(\varphi, A\varphi) \geqslant 0$, если $\varphi \in D(A)$.
(a) Докажите, что $\|(A+I)\varphi\|^2 \geqslant \|\varphi\|^2 + \|A\varphi\|^2$.
(b) Покажите, что $\operatorname{Ran}(A+I)$ замкнут, если A—замкнутый оператор.
(c) Покажите, что A в существенном самосопряжен тогда и только тогда, когда уравнение $A^*\psi = -\psi$ не имеет ненулевых решений.

†*11.* Докажите часть (c) теоремы VIII.7.

†*12.* Докажите теорему VIII.11 непосредственно, т. е. не прибегая к теореме VIII.10.

13. Найдите два плотных линейных подпространства D_1 и D_2 в $L^2(\mathbb{R})$, $D_1 \cap D_2 = \{0\}$, такие, что x в существенном самосопряжен на D_1, а x^2 в существенном самосопряжен на D_2.

†*14.* Пусть A—симметрический оператор с областью определения $D \subset \mathcal{H}$. Пусть $D_1 \subset D$—плотное линейное подмножество в $\mathcal{H}$, и предположим, что $A \restriction D_1$ в существенном самосопряжен. Докажите, что A в существенном самосопряжен и $\bar{A} = \overline{A \restriction D_1}$.

†*15.* (a) Докажите, что оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его область определения $D(A)$ полна по норме

$$\|\psi\|_A = \|A\psi\| + \|\psi\|.$$

(b) Докажите, что полуограниченная квадратичная форма замкнута в том и только том случае, когда для любой последовательности $\{\varphi_n\}$, такой, что $\varphi_n \in Q(q)$, $\varphi_n \xrightarrow{\mathcal{H}} \varphi$ и $q(\varphi_n - \varphi_m, \varphi_n - \varphi_m) \underset{n, m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, имеем $\varphi \in Q(q)$ и $q(\varphi_n - \varphi, \varphi_n - \varphi) \to 0$.

†*16.* (a) Покажите, что квадратичная форма q, порождаемая полуограниченным самосопряженным оператором A (пример 2 § VIII.6), замкнута.
(b) Покажите, что любая существенная область для A является существенной областью для q.

†*17.* Докажите утверждения (a)—(d) примера 3 § VIII.6.

†*18.* Восполните детали доказательства теоремы VIII.16.

19. Пусть $A_n = (1 - 1/n)x$ в $L^2(\mathbb{R})$ и $A = x$. Покажите, что можно выбрать области самосопряженности в существенном для A_n и A, не имеющие ненулевых векторов в общей части, но что $A_n \to A$ в равномерном резольвентном смысле.

20. (a) Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы, и предположим, что для всех $\varphi, \psi \in \mathscr{H}$ и всех λ, $\operatorname{Im}\lambda \neq 0$, выполняется соотношение $(R_\lambda(A_n)\varphi, \psi) \longrightarrow (R_\lambda(A)\varphi, \psi)$. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле. [*Указание*: воспользуйтесь тождеством Гильберта.]
(b) Пусть $\{A_n\}$ и A — самосопряженные операторы. Примените часть (а) для доказательства того, что если $R_\lambda(A_n)$ сильно сходится к $R_\lambda(A)$ в нижней полуплоскости, то $R_\lambda(A_n)$ также сходится сильно к $R_\lambda(A)$ в верхней полуплоскости.

†*21.* Обобщите доказательства теорем VIII.20 и VIII.21, чтобы показать, что если $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле, то $e^{itA_n}\varphi \longrightarrow e^{itA}\varphi$ *равномерно* по t в любом конечном интервале.

†*22.* Восполните детали доказательств пунктов (b) и (c) теоремы VIII.25.

23. (a) Пусть $\{A_n\}$ — последовательность самосопряженных операторов, и предположим, что для каждого $\varphi \in \mathscr{H}$ и каждого $t \in \mathbb{R}$ последовательность $e^{itA_n}\varphi$ сходится в $\mathscr{H}$. Докажите, что существует самосопряженный оператор A, такой, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле. [*Указание*: примените теорему фон Неймана из § VIII.4.]
(b) Приведите пример, показывающий, что заключение пункта (а) может не иметь места, если e^{itA_n} сходится слабо, а не сильно.

†*24.* Докажите теорему VIII.27b.

†*25.* Докажите теорему VIII.28.

26. Пусть $\{A_n\}$ — равномерно ограниченная последовательность самосопряженных операторов. Пусть A — ограниченный самосопряженный оператор. Докажите, что $A = \text{w. gr.-}\lim A_n$ тогда и только тогда, когда $A_n \longrightarrow A$ в слабой операторной топологии.

27. Пусть $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле тогда и только тогда, когда $(A_n + I)^{-1} \longrightarrow (A + I)^{-1}$ сильно.

†*28.* Докажите, что если $\{A_n\}$ и A — равномерно ограниченные самосопряженные операторы, то $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле тогда и только тогда, когда $A_n \longrightarrow A$ сильно.

29. Пусть A самосопряжен.
(a) Докажите, что $tA \longrightarrow t_0 A$ в равномерном резольвентном смысле при $t \longrightarrow t_0 \neq 0$.
(b) Докажите, что $e^{itA} \longrightarrow e^{it_0 A}$ равномерно тогда и только тогда, когда A ограничен.

30.†(a) Докажите, что если $\{A_n\}$ и A — равномерно ограниченные самосопряженные операторы и $A_n \xrightarrow{w} A$, но $A_n \overset{s}{\not\longrightarrow} A$, то A_n не сходится к A в слабом резольвентном смысле.
(b) Когда не имеет места слабый аналог теоремы VIII.18?

31. Справедлив ли аналог пункта (а) теоремы VIII.25 для форм?

32. Докажите, что $A_n = nI$ имеет сильный граф-предел при $n \longrightarrow \infty$, который не является графиком никакого оператора.

33. Пусть $\{A_n\}$ — *постоянная* последовательность симметрических операторов (т. е. $A_n = B\ \forall n$). Докажите, что сильный граф-предел A_n равен замыканию B.

34. Пусть R — оператор правого сдвига на l_2. Докажите, что w.gr.-lim R^n — нулевой оператор, хотя st.gr.-lim R^n имеет график $\{\langle 0, 0\rangle\}$.

35. Докажите непосредственно (не применяя преобразования Фурье), что $i^{-1}(d/dx)$ в существенном самосопряжен на $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

†*36.* Докажите следствие теоремы VIII.14.

†*37.* Воспроизведите детали доказательства теоремы VIII.22.

38. (a) Пусть $\{A_n\}$ и A — положительные самосопряженные операторы, и предположим, что $e^{-tA_n} \longrightarrow e^{-tA}$ сильно при каждом $t > 0$. Докажите, что $A_n \longrightarrow A$ в сильном резольвентном смысле.

(b) Докажите аналог пункта (a), если сильная сходимость заменена равномерной сходимостью.

39. Пусть $U(t)$, $t \geqslant 0$, — семейство самосопряженных операторов, удовлетворяющее условиям (i) $\| U(t) \| \leqslant e^{Et}$ для некоторого $E \in \mathbb{R}$, (ii) $U(t)\, U(s) = U(t+s)$, (iii) отображение $t \mapsto U(t)$ сильно непрерывно, (iv) $U(0) = I$. Тогда

(a) Подражая доказательству теоремы Стоуна, покажите, что $U(t) = e^{-At}$ для единственного самосопряженного оператора A.

(b) Получите тот же результат, пользуясь функциональным исчислением.

(c) Докажите, что $A \geqslant -E$.

40. Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с мерой и $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$. Отображение T пространства $L^2(M, d\mu)$ в себя назовем **сохраняющим положительность**, если $(Tf)(x) \geqslant 0$ п.в., как только $f(x) \geqslant 0$ п.в. Пусть A, B — самосопряженные операторы в $\mathcal{H}$, и предположим, что e^{-itA} и e^{-itB} сохраняют положительность при всех $t \in \mathbb{R}$ и что $A + B$ в существенном самосопряжен на $D(A) \cap D(B)$. Докажите, что $e^{i(At+Bt)}$ сохраняет положительность при любом $t \in \mathbb{R}$.

41. Пусть H_0 и V — замкнутые положительные квадратичные формы, и пусть $\beta \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$. Предположим, что $Q(H_0) \cap Q(V)$ плотно в $\mathcal{H}$. Докажите, что сумма $H_0 + \beta V$, определенная как квадратичная форма на $Q(H_0) \cap Q(V)$, замкнута и секториальна.

42. Пусть T — самосопряженный плотно определенный оператор в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Предположим, что для некоторых $\lambda_0 \in \rho(T)$ оператор $R_{\lambda_0}(T)$ компактен. Докажите, что $R_\lambda(T)$ компактен при всех $\lambda \in \rho(T)$, и рассмотрите различные типы спектров, которые может иметь T.
Замечание. Операторы с компактными резольвентами мы изучаем в гл. XIII.

43. (a) Приведите пример, показывающий, что для получения полного спектра $P(A_1, \ldots, A_N)$ может понадобиться *замыкание* области значений P на $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{N} \sigma(A_k)$.

(b) Докажите, что если $A_1, \ldots, A_N$ ограничены, то замыкание *не* требуется.

44. Докажите утверждение о единственности в теореме VIII.32.

45. Пусть T — замкнутый оператор. Докажите, что множество $M = \{\psi \mid \psi \in D(T),\ T\psi \in D(T^*)\}$ плотно, а оператор T^*T, определенный на M, самосопряжен. (*Указание:* пусть S — оператор, построенный в теореме VIII.32; покажите, что $D(S) \subset M$ и что T^*T — симметрическое расширение S.)

46. Пусть T — замкнутый оператор в гильбертовом пространстве. Определим его числовую область значений $N(T)$ как $N(T) = \{(\psi, T\psi) \mid \psi \in D(T)\}$.

(a) Докажите, что $\sigma(T)\subset N(T)\cup N(T^*)^*$, где $N(T^*)^*$ — множество $\{\overline{(\psi, T^*\psi)}\mid \psi\in D(T)\}$.

(b) Найдите такой оператор T, что $\sigma(T)\not\subset N(T)$, а значит, $N(T)\neq\neq N(T^*)^*$. (*Указание*: выберите T симметрическим!)

47. Пусть A самосопряжен на $D(A)$ в $\mathscr{H}_1$ и B самосопряжен на $D(B)$ в $\mathscr{H}_2$. Примените теорему VIII.10 для доказательства того, что $A\otimes I+I\otimes B$ в существенном самосопряжен на $D(A)\otimes D(B)$. (*Указание*: $e^{itA}\otimes e^{itB}$ оставляет $D(A)\otimes D(B)$ инвариантным.)

48. Пусть A — замкнутый симметрический оператор и $A\neq A^*$. Пусть a и b — квадратичные формы, такие, что

$$Q(a)=D(A),\quad a(\psi,\varphi)=(A\psi, A\varphi),$$
$$Q(b)=D(A^*),\quad b(\psi,\varphi)=(A^*\psi, A^*\varphi).$$

Покажите, что $a\subset b$, но $a\neq b$, несмотря на то, что a и b — положительные симметричные формы.

49. Говорят, что оператор A имеет **чисто дискретный спектр** в (a, b), если $(a, b)\cap\sigma(A)=(a, b)\cap\sigma_{\text{disc}}(A)$.

(a) Докажите, что A имеет чисто дискретный спектр в (a, b) тогда и только тогда, когда $P_{(a+\varepsilon,\ b-\varepsilon)}$ компактен для всех достаточно малых ε, где $\{P_\Omega\}$ — семейство спектральных проекторов A.

(b) Докажите, что A имеет чисто дискретный спектр в (a, b) тогда и только тогда, когда оператор $f(A)$ компактен для любой функции f из C^∞, такой, что $\operatorname{supp} f\subset(a, b)$. [*Указание*: воспользуйтесь задачей 45 гл. VI.]

(c) Пусть $A_n\to A$ в равномерном резольвентном смысле. Предположим, что каждый A_n имеет чисто точечный спектр в (a, b). Докажите, что и A имеет чисто точечный спектр в (a, b).

50. Пусть A — положительный самосопряженный оператор.

(a) Докажите, что $\|(A+w)^{-1}\|\leqslant w^{-1}$, если $w>0$.

(b) Докажите, что риманов интеграл

$$\int_0^\infty w^{-1/2}(A+w)^{-1}\,dw$$

существует.

(c) Докажите, что

$$A^{+1/2}\psi=\left[\frac{1}{\pi}\int_0^\infty w^{-1/2}(A+w)^{-1}\,dw\right]A\psi\quad\text{для любого } \psi\in D(A).$$

(d) Таким же образом докажите, что

$$A^\alpha\psi=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\int_0^\infty\left[w^{\alpha-1}(A+w)^{-1}\,dw\right]A\psi\quad\text{для любого } \psi\in D(A),$$

если $0<\alpha<1$.

(e) Докажите, что

$$\left(\lim_{\alpha\downarrow 0}\frac{A^\alpha-1}{\alpha}\right)\psi=(\log A)\psi\quad\text{для любого } \psi\in D(A).$$

51. Пусть A и B — самосопряженные операторы и $A, B \geqslant 0$; будем говорить, что $A \geqslant B$, если $D(B) \supset D(A)$ и $\langle\psi, B\psi\rangle \leqslant \langle\psi, A\psi\rangle$ для всех $\psi \in D(A)$.
(a) Пусть $0 \leqslant A \leqslant B$; докажите, что $A(A+w)^{-1} \leqslant B(B+w)^{-1}$, если $w \geqslant 0$.
(b) Докажите, что $A^{\alpha} \leqslant B^{\alpha}$, если $A \leqslant B$ и $0 < \alpha < 1$.
(c) Докажите, что $\log A \leqslant \log B$, если $A \leqslant B$.

**52.* Распространите доказательство спектральной теоремы из задачи 32 гл. VII на неограниченный случай, применяя полярное разложение для замкнутых операторов. Удостоверьтесь также, что можно доказать полярное разложение в неограниченном случае, не применяя спектральную теорему. [*Указание*: воспользуйтесь задачей 50.]

Литература к задаче 52: книга Като, стр. 352—354, 404—408, 419—422.