ВВЕДЕНИЕ

Корни математики лежат в теории чисел, геометрии и физике. Со времен Ньютона поиски математических моделей физических явлений служили источником математических задач. Фактически целые области математики выросли из попыток разобраться в конкретных физических ситуациях. Например, весь гармонический анализ развился из работы Фурье об уравнении теплопроводности.

И хотя в этом столетии математика и физика развивались порознь, физика продолжала стимулировать математические исследования. Отчасти по этой причине влияние физики на математику всем хорошо понятно. Однако значение математики для физики далеко не все правильно оценивают. Существует широко распространенное заблуждение, что математика полезна для физики лишь постольку, поскольку она дает средства для вычислений. На деле математика играет гораздо более тонкую роль, которая в конечном счете куда важнее. Когда создается удачная математическая модель физического явления, т. е. модель, которая позволяет делать точные вычисления и предсказания, то сама математическая структура модели открывает новые стороны этого явления. Иными словами, когда модель удачна, то естественно думать о физических величинах на языке математических объектов, их представляющих, и интерпретировать сходные или вторичные явления на языке той же модели. В результате исследование внутренней математической структуры модели может изменить и расширить наше представление о физическом явлении. Великолепным примером служит механика Ньютона, которая дала столь ясную и совершенную картину движения небесных тел, что ею стали пользоваться для объяснения практически всех физических явлений. Сама эта модель заняла центральное место в понимании всего физического мира, и отказаться от нее в конце девятнадцатого века было необычайно трудно даже перед лицом очевидных противоречий. Более современный пример подобного влияния математики на физику дает применение теории групп к классификации элементарных частиц.

Исследование математических моделей физических явлений составляет часть предмета математической физики. Под исследованием здесь понимается и строгий вывод конечных формул, и анализ внутренней математической структуры моделей. В обоих случаях возникают задачи, которые приводят к более общим математическим вопросам, уже не связанным непосредственно с какой-либо частной моделью. И хотя эти общие вопросы оказываются иногда чисто математическими, их принято относить к математической физике, поскольку они возникли из физических задач.

Традиционная математическая физика имела дело с математическими задачами классической физики: механики, гидродинамики, акустики, теории потенциала и оптики. Главным математическим средством была теория дифференциальных уравнений, обыкновенных и в частных производных, а также родственные области, такие, как теория интегральных уравнений и вариационное исчисление. Эта классическая математическая физика давно уже входит в учебную программу математических и физических факультетов. Но начиная с 1926 г. фронт исследований все больше смещается в сторону квантовой механики и областей, начало которым положила квантовая теория: атомной физики, ядерной физики, теории твердого тела, физики элементарных частиц. Основной математической дисциплиной при изучении этих областей оказывается функциональный анализ, хотя важную роль играют также теория представлений групп и функции многих комплексных переменных. Сразу после 1926 г. фон Нейман приступил к анализу общей структуры квантовой механики, но тогда почти не делалось попыток исследовать характер отдельных квантовых систем (исключение составляют лишь некоторые работы Фридрихса и Реллиха). Положение изменилось в начале 50-х годов, когда Като доказал самосопряженность атомных гамильтонианов, а Гординг и Вайтман сформулировали аксиомы квантовой теории поля. В этих работах продемонстрирована плодотворность методов функционального анализа и поднято множество трудных математических вопросов, к которым приводит современная физика. С тех пор необычайно расширился как арсенал средств функционального анализа, так и круг объектов, рассматриваемых в математической физике. Диапазон задач простирается здесь от самых конкретных — например, вычисление или оценка точечного спектра некоего частного оператора — и до самых общих, таких, как теория представлений C^*-алгебр. Методы и общий подход к предмету стали более абстрактными. И хотя есть такие области, где физика настолько понятна, что задачи сводятся к чисто математическим упражнениям, но есть и такие, где ни физическая, ни математическая модель не очень понятны. Такая эволюция имела много серьезных последствий, из которых отнюдь не последнее — затрудненность общения между математиками и физиками. Физики встревожены растущими требованиями к широте математического образования и математической искушенности, которые нужны теперь для понимания моделей. А математики страдают от своей неспособности понять физику и от того, что физики не способны формулировать свои задачи так, чтобы они стали понятны математикам.

Несколько замечаний о самой книге. Предварительные знания, которые требуются для ее чтения, отвечают тому среднему уровню, который достигается после примерно первых трех лет обучения в американском университете. Первая глава была задумана как обзор этого предварительного материала. Мы рассчитывали также, что читатель отчасти знаком с материалом глав II—IV, и опускали некоторые доказательства, если считали их несущественными и не представляющими самостоятельного интереса.

Содержание этого тома укладывается в двухсеместровый курс. Правда, мы прочитали большую часть этого материала в специальном односеместровом курсе в Принстонском университете, встречаясь со своими слушателями по пять раз в неделю, но никому не советуем повторять этот опыт. Чтобы содержание книги было легче приспособить к лекциям, мы располагали материал внутри глав так, что первые разделы содержат основные понятия, а последующие—более специальные и трудные вопросы и приложения. Например, основной материал о неограниченных операторах можно прочитать студентам в девяти или десяти лекциях на материале § 1—4 гл. VIII. С другой стороны, если восполнить детали доказательств и добавить материал из замечаний и задачи, то из главы VIII можно сделать отдельный односеместровый курс.

Каждая глава в этой книге заканчивается длинным списком задач. Некоторые задачи должны заполнить пробелы основного текста (они отмечены крестом †). В других намечены иные доказательства или вводится новый материал. Мы включили и трудные задачи (отмеченные звездочкой *), чтобы зажечь читателя. Очень советуем всем решать задачи. Ни для кого не секрет, что математику учат решая задачи, а не наблюдая, как их решают другие.

Мы надеемся, что наш курс откроет физикам доступ к современным абстрактным методам, и что математики тоже выиграют, если будут изучать эти методы одновременно с их приложениями.