IX. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Следовательно, уравнение состояния имеет вид

$$F(x) = \int dq Q \cos qx.$$

Если бы мы подставили вместо Q какую-нибудь функцию от q и выполнили интегрирование от $q=0$ до $q=\infty$, то нашли бы некоторую функцию от x; требуется решить обратную задачу, т. е. установить, какая функция от q, будучи подставленной вместо Q, приведет в результате к заданной функции $F(x)$, — весьма замечательная задача, решение которой требует пристального изучения.

ЖОЗЕФ ФУРЬЕ

IX. 1. Преобразование Фурье на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Свертка

Преобразование Фурье — это инструмент, одинаково важный как в классическом, так и в современном анализе. Мы начнем с того, что определим прямое и обратное преобразования Фурье на пространстве Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ быстро убывающих функций из C^∞.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. **Преобразование Фурье** функции f есть функция $\hat{f}$, задаваемая равенством

$$\hat{f}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i \lambda_i$. **Обратное преобразование Фурье** функции f, обозначаемое $\check{f}$, есть функция

$$\check{f}(\boldsymbol{\lambda}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{x}\cdot\boldsymbol{\lambda}} f(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

Иногда мы будем писать $\hat{f} = \mathscr{F}f$.

Поскольку каждая функция из пространства Шварца лежит в $L^1(\mathbb{R}^n)$, предыдущие интегралы имеют смысл. Многие авторы начинают с обсуждения преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$. Мы решили начать с пространства Шварца по двум причинам. Во-первых, преобразование Фурье — взаимно однозначное отображение пространства Шварца на себя (теорема IX.1). Это сразу облегчает переход к обратному преобразованию Фурье, которое, разумеется, есть просто обратное отображение. Иными словами, на пространстве Шварца прямое и обратное преобразования Фурье можно изучать единообразно. Хотя все это справедливо и для преобразования Фурье на $L^2(\mathbb{R}^n)$ (см. теорему IX.6), задать его на $L^2(\mathbb{R}^n)$ непосредственно с помощью интегральной формулы невозможно, так как функции из $L^2(\mathbb{R}^n)$ не обязаны лежать в $L^1(\mathbb{R}^n)$ и потребуется некоторый предельный переход. Во-вторых, коль скоро известно, что преобразование Фурье — взаимно однозначное ограниченное отображение $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, легко продолжить его на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Как раз это продолжение играет основную роль в приложениях; см. § 5, 6 и 8.

Мы будем пользоваться стандартными мультииндексными обозначениями: мультииндекс

$$\alpha = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$$

— это n неотрицательных целых чисел. Множество всех мультииндексов будет обозначаться I_+^n. Символы $|\alpha|$, x^α, D^α и x^2 определяются следующим образом:

$$|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i,$$

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n},$$

$$D^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \ldots \partial x_n^{\alpha_n}},$$

$$x^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Для доказательства того, что преобразования $\hat{}$ и $\check{}$ взаимно обратны, покажем, что справедлива такая

Лемма. Отображения $\hat{}$ и $\check{}$ суть непрерывные линейные отображения $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Далее, если α и β — мультииндексы, то

$$((i\lambda)^\alpha D^\beta \hat{f})(\lambda) = \widehat{D^\alpha((-ix)^\beta f(x))}(\lambda). \tag{IX.1}$$

Доказательство. Отображение $\hat{}$, очевидно, линейно. Поскольку

$$(\lambda^\alpha D^\beta \hat{f})(\lambda) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \lambda^\alpha (-ix)^\beta e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{(-i)^\alpha} (D_x^\alpha e^{-i\lambda\cdot x}) (-ix)^\beta f(x)\, dx =$$

$$= \frac{(-i)^\alpha}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} D_x^\alpha ((-ix)^\beta f(x))\, dx,$$

заключаем, что

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta}=\sup_{\lambda}|\lambda^{\alpha}(D^{\beta}\hat{f})(\lambda)|\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int|D_x^{\alpha}(x^{\beta}f)|\,dx<\infty;$$

поэтому $\hat{}$ переводит $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и справедливо соотношение (IX.1). Более того, если k достаточно велико, так что $\int(1+x^2)^{-k}dx<\infty$, то

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta}\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(1+x^2)^{-k}}{(1+x^2)^{-k}}|D_x^{\alpha}(-ix)^{\beta}f(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}(1+x^2)^{-k}dx\right)\sup_x\{(1+x^2)^{+k}\cdot|D_x^{\alpha}(-ix)^{\beta}f(x)|\}.$$

Применяя правило Лейбница, легко получаем, что существуют такие мультииндексы α_j и β_j и константы c_j, что

$$\|\hat{f}\|_{\alpha,\beta}\leqslant\sum_{j=1}^{M}c_j\|f\|_{\alpha_j,\beta_j}.$$

Итак, отображение $\hat{}$ ограничено и, следовательно, по теореме V.4, непрерывно. Для отображения $\check{}$ доказательство аналогично. ∎

Теперь мы готовы доказать теорему обращения Фурье. Приводимое доказательство использует первоначальную идею Фурье.

Теорема IX.1 (теорема обращения Фурье). Преобразование Фурье — линейная взаимно непрерывная биекция $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Отображение, обратное к нему, — обратное преобразование Фурье, т. е. $\check{\hat{f}}=f=\hat{\check{f}}$.

Доказательство. Докажем, что $\check{\hat{f}}=f$. Доказательство равенства $\hat{\check{f}}=f$ проводится так же. Из $\hat{\check{f}}=f$ следует, что отображение $\hat{}$ сюръективно, а из $\check{\hat{f}}=f$ — что $\hat{}$ инъективно. Поскольку $\hat{}$ и $\check{}$ — непрерывные отображения $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, достаточно доказать равенство $\check{\hat{f}}=f$ для всех функций f, содержащихся в плотном множестве $C_0^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Пусть C_{ε} — куб в $\mathbb{R}^n$ объема $(2/\varepsilon)^n$ с центром в начале координат. Выберем ε достаточно малым так, чтобы носитель f содержался в C_{ε}. Положим

$$K_{\varepsilon}=\{k\in\mathbb{R}^n\mid\text{каждое число } k_i/\pi\varepsilon\text{ — целое}\}.$$

Тогда

$$f(x)=\sum_{k\in K_{\varepsilon}}\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x},f\right)\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x}$$

— не что иное, как ряд Фурье для f, равномерно сходящийся в C_ε к f в силу непрерывной дифференцируемости f (теорема II.8). Итак,

$$f(x)=\sum_{k\in K_\varepsilon}\frac{\hat f(k)\,e^{ik\cdot x}}{(2\pi)^{n/2}}(\pi\varepsilon)^n. \tag{IX.2}$$

Поскольку $\mathbb{R}^n$ — объединение непересекающихся кубов объема $(\pi\varepsilon)^n$ с центрами в точках из K_ε, то правая часть (IX.2) оказывается римановой суммой для интеграла от функции $\hat f(k)\,e^{ik\cdot x}/(2\pi)^{n/2}$. По доказанной лемме $\hat f(k)\,e^{ik\cdot x}\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, так что римановы суммы сходятся к интегралу. Итак, $\check{\hat f}=f$. ∎

Следствие. Пусть $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}|\hat f(k)|^2\,dk.$$

Доказательство. Это следствие вытекает скорее из доказательства, чем из утверждения теоремы IX.1. Если f имеет компактный носитель, то для достаточно малых ε

$$f(x)=\sum_{k\in K_\varepsilon}\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x},\ f(x)\right)\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x}.$$

Поскольку $\left\{\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x}\right\}_{k\in K_\varepsilon}$ — ортонормированный базис в $L^2(C_\varepsilon)$, то

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)|^2\,dx&=\int_{C_\varepsilon}|f(x)|^2\,dx=\\&=\sum_{k\in K_\varepsilon}\left|\left(\left(\frac{1}{2}\varepsilon\right)^{n/2}e^{ik\cdot x},\ f(x)\right)\right|^2=\\&=\sum_{k\in K_\varepsilon}|\hat f(k)|^2(\pi\varepsilon)^n\longrightarrow\\&\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}\int_{\mathbb{R}^n}|\hat f(k)|^2\,dk.\end{aligned}$$

Это доказывает следствие для $f\in C_0^\infty$. Так как отображение $\hat{}$ и норма $\|\cdot\|_2$ непрерывны на $\mathscr{S}$, а C_0^∞ плотно в нем, этот результат справедлив на всем $\mathscr{S}$. ∎

Пример 1. Вычислим фурье-образ функции $f(x)=e^{-\alpha x^2/2}\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$, где $\alpha>0$:

$$\hat{f}(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha x^2/2}e^{-i\lambda\cdot x}\,dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\exp\left(-t^2-it\lambda\sqrt{\frac{2}{\alpha}}\right)dt=$$

$$=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_{\mathbb{R}}\exp\left[-\left(t+i\frac{\lambda}{\sqrt{2\alpha}}\right)^2\right]dt=$$

$$=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha\pi}}\int_{\mathbb{R}}e^{-t^2}\,dt=\frac{e^{-\lambda^2/2\alpha}}{\sqrt{\alpha}}.$$

Предпоследнее равенство вытекает из интегральной формулы Коши с учетом экспоненциального убывания функции e^{-z^2} вдоль прямых, параллельных оси x.

Определим теперь преобразование Фурье на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Определение. Пусть $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда преобразование Фурье от T, обозначаемое $\hat{T}$, есть обобщенная функция умеренного роста, задаваемая равенством $\hat{T}(\varphi)=T(\hat{\varphi})$.

Предположим, что $h,\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$; тогда в силу поляризационного тождества и следствия теоремы IX.1 имеем $(h,\varphi)=(\hat{h},\hat{\varphi})$. Подставляя $\bar{\hat{g}}=\check{\bar{g}}$ вместо h, находим

$$T_{\hat{g}}(\varphi)=\int\hat{g}(x)\varphi(x)\,dx=\int g(x)\hat{\varphi}(x)\,dx=T_g(\hat{\varphi})=\hat{T}_g(\varphi),$$

где $T_{\hat{g}}$ и T_g — обобщенные функции, соответствующие функциям $\hat{g}$ и g соответственно. Эта выкладка показывает, что преобразование Фурье на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ есть продолжение преобразования, определенного ранее на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Теорема IX.2. Преобразование Фурье — взаимно однозначная линейная биекция $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, являющаяся единственным слабо непрерывным продолжением преобразования Фурье, заданного на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Если $\varphi_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\varphi$, то по теореме IX.1 $\hat{\varphi}_n\xrightarrow{\mathscr{S}}\hat{\varphi}$, так что $T(\hat{\varphi}_n)\to T(\hat{\varphi})$ для каждого T в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Поэтому $\hat{T}(\varphi_n)\to\hat{T}(\varphi)$, откуда видно, что $\hat{T}$ — непрерывный линейный функционал на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Помимо этого, если $T_n\xrightarrow{w}T$, то $\hat{T}_n\xrightarrow{w}\hat{T}$, поскольку из $T_n(\hat{\varphi})\to T(\hat{\varphi})$ следует, что $\hat{T}_n(\varphi)\to\hat{T}(\varphi)$. Итак, отображение $T\mapsto\hat{T}$ слабо непрерывно.

Остальные свойства преобразования $\hat{}$ немедленно следуют из соответствующих утверждений для $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ (см. задачу 19 гл. V). ∎

Пример 2. Вычислим фурье-образ производной дельта-функции в точке $b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\widehat{\delta_b'}(\varphi) &= \delta_b'(\hat{\varphi}) = \\ &= \delta_b\left(-\frac{d}{d\lambda}\hat{\varphi}(\lambda)\right) = \\ &= \delta_b\left(\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\right)\int e^{-i\lambda x}(ix)\,\varphi(x)\,dx = \\ &= \int\left(\frac{ixe^{-ibx}}{\sqrt{2\pi}}\right)\varphi(x)\,dx.\end{aligned}$$

Итак, фурье-образ δ_b' есть функция $ixe^{-ibx}/\sqrt{2\pi}$.

Введем теперь новую операцию над функциями.

Определение. Пусть $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда **сверткой** f и g, обозначаемой $f * g$, называется функция

$$(f * g)(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y-x)\,g(x)\,dx.$$

Свертки возникают во многих ситуациях (мы уже фактически пользовались этим понятием в § VIII.1 при рассмотрении замкнутых операторов). В § 4 мы с помощью интерполяционных теорем получим L^p-оценки свертки $f * g$, выраженные через f и g. В этом разделе мы остановимся на свойствах свертки как отображения из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. На основе этих свойств будет показано, что свертку можно продолжить до отображения из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n) \times \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в O_M^n, т. е. в пространство полиномиально ограниченных функций из C^∞. Свертки часто возникают в контексте преобразования Фурье, так как преобразование Фурье переводит произведения в свертки (теорема IX.3 (b) и теорема IX.4 (c)).

Теорема IX.3.

(a) Для каждой функции $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $g \mapsto f * g$ из $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ непрерывно.

(b) $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2}\hat{f} * \hat{g}$ и $\widehat{f * g} = (2\pi)^{n/2}\hat{f}\,\hat{g}$.

(c) Для $f, g, h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ имеем $f * g = g * f$ и $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Доказательство. Исходя из поляризационного тождества и следствия теоремы IX.1, находим, что $(\varphi, \psi) = (\hat{\varphi}, \hat{\psi})$ для $\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Фиксируя некоторое $y \in \mathbb{R}^n$ и применяя это равенство к $e^{iy\cdot x}\bar{f}(x)$

и g, получаем $(e^{iy\cdot x}\overline{f}, g) = (\widehat{e^{iy\cdot x}\overline{f}}, \hat{g})$. Но

$$(e^{iy\cdot x}\overline{f}, g) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-iy\cdot x} f(x)\, g(x)\, dx$$

и

$$(\widehat{e^{iy\cdot x}\overline{f}}, \hat{g}) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\overline{(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x + iy\cdot x}\, \overline{f(x)}\, dx}\right) \hat{g}(\lambda)\, d\lambda =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y-\lambda)\, \hat{g}(\lambda)\, d\lambda,$$

откуда следует, что $\widehat{fg} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{g}$. С помощью обратного преобразования Фурье это утверждение можно сформулировать так:

$$(2\pi)^{n/2} \widehat{\check{f}\, \check{g}} = f * g.$$

Это показывает, что свертка как отображение $g \mapsto f * g$ есть композиция следующих операций: обратного преобразования Фурье, умножения на $(2\pi)^{n/2} \check{f}$ и прямого преобразования Фурье. Отсюда вытекает непрерывность свертки.

Утверждения пункта (c) тривиально следуют из (b). ∎

Для того чтобы продолжить отображение C_f: $g \mapsto f * g$ на $\mathcal{S}'$, найдем сначала непрерывное отображение $\tilde{C}_f'$: $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$, такое, что $\tilde{C}_f' \restriction \mathcal{S} = C_f$, а затем по определению будем считать $\tilde{C}_f'$ сверткой на $\mathcal{S}'$.

Определение. Предположим, что $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $\tilde{f}(x)$ обозначает $f(-x)$. Тогда свертка T и f, обозначаемая $T * f$, есть обобщенная функция из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, задаваемая формулой

$$(T * f)(\varphi) = T(\tilde{f} * \varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

То, что $T * f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, следует из непрерывности отображения $g \mapsto \tilde{f} * g$. Свойства построенного продолжения свертки резюмирует приводимая ниже теорема.

Пусть f_y обозначает функцию $f_y(x) = f(x-y)$, а $\tilde{f}_y$ — функцию $f(y-x)$. В тех случаях, когда f задается очень длинным выражением $(\ldots)$, мы иногда будем писать $(\ldots)^{\sim}$ вместо $(\widetilde{\ldots})$.

Теорема IX.4. Для каждой $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ отображение $T \mapsto T * f$ есть слабо непрерывное отображение $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, являющееся продолжением свертки, заданной на $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Кроме того:

(a) $T*f$ — полиномиально ограниченная функция из C^∞, т. е. $T*f\in O_M^n$. При этом $(T*f)(y)=T(\tilde{f}_y)$ и

$$D^\beta(T*f)=(D^\beta T)*f=T*D^\beta f, \tag{IX.3}$$

(b) $(T*f)*g=T*(f*g)$,

(c) $(\widehat{T*f})=(2\pi)^{n/2}\hat{f}\hat{T}$.

Доказательство. Поскольку отображение $T\longmapsto T*f$ определено как сопряженное к ограниченному отображению из $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}$, оно автоматически слабо непрерывно. То, что оно продолжает свертку, заданную на $\mathscr{S}$, доказывается тривиальной заменой переменных. Свойства (IX.3), (b) и (c) сразу же следуют из соответствующих свойств свертки при $T\in\mathscr{S}$, а также свойства слабой плотности $\mathscr{S}$ в $\mathscr{S}'$ и того, что все операции: $\mathscr{F}$, D^β, умножение на $\hat{f}$ и свертка — слабо непрерывны на $\mathscr{S}'$.

Остается доказать первую часть пункта (a). Так как $T\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, то из теоремы регулярности (теорема V.10) следует, что существуют ограниченная непрерывная функция h, целое положительное r и мультииндекс β, такие, что

$$T(\tilde{f}_y)=\int_{\mathbb{R}^n} h(x)(1+x^2)^r(D^\beta f)(y-x)\,dx.$$

Поскольку $D^\beta f\in\mathscr{S}$, то $T(\tilde{f}_y)$ — бесконечно дифференцируемая функция y. Замена переменных $\tau=y-x$ показывает, что

$$|T(\tilde{f}_y)|\leqslant\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}(1+x^2)^r|(D^\beta f)(y-x)|\,dx=$$
$$=\|h\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}(1+(y-\tau)^2)^r|D^\beta f(\tau)|\,d\tau,$$

откуда легко следует, что отображение $y\longmapsto T(\tilde{f}_y)$ полиномиально ограничено. Аналогичное доказательство проходит и для производных функции $y\longmapsto T(\tilde{f}_y)$. Итак, $T(\tilde{f}_y)\in O_M^n$.

Предположим, что обобщенная функция $S\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ задается полиномиально ограниченной непрерывной функцией s. Тогда, по теореме Фубини, для $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ находим

$$\begin{aligned}(S*f)(\varphi)&\equiv S(\tilde{f}*\varphi)=\\&=\int s(x)\left(\int\tilde{f}(x-y)\varphi(y)\,dy\right)dx=\\&=\int\left(\int s(x)\tilde{f}_y(x)\,dx\right)\varphi(y)\,dy=\\&=(S(\tilde{f}_y))(\varphi),\end{aligned}$$

так что $S*f=S(\tilde{f}_y)$. По теореме регулярности в общем случае $T=D^\alpha S$ для некоторой S рассматриваемого типа. Таким образом, согласно (IX.3),

$$\begin{aligned} T * f &= (D^\alpha S) * f = S * D^\alpha f = \\ &= S((D^\alpha f)_{\tilde{y}}) = (-1)^{|\alpha|} S(D^\alpha(\tilde{f}_y)) = \\ &= D^\alpha S(\tilde{f}_y) = T(\tilde{f}_y), \end{aligned}$$

что завершает доказательство. ∎

Теорема IX.5. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $\widehat{fT} \in O_M^n$ и $\widehat{fT}(k) = (2\pi)^{-n/2} T(fe^{-ik\cdot x})$. В частности, если T имеет компактный носитель и функция $\psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ тождественно равна единице в окрестности носителя T, то

$$\hat{T}(k) = (2\pi)^{-n/2} T(\psi e^{-ik\cdot x}).$$

Доказательство. По теореме IX.4 (c) и формуле обращения преобразования Фурье имеем $\widehat{fT} = (2\pi)^{-n/2} \hat{f} * \hat{T}$. Следовательно, $\widehat{fT} \in O_M^n$ и

$$\begin{aligned} \widehat{fT}(k) &= (2\pi)^{-n/2} \hat{T}(\bar{\hat{f}}_k) = \\ &= (2\pi)^{-n/2} T(e^{-ik\cdot x} f). \ ∎ \end{aligned}$$

Заметим, что можно также определить свертку обобщенной функции $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ с функцией $f \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^n)$, полагая $(T * f)(y) = T(\tilde{f}_y)$. Доказательство, аналогичное доказательству теоремы IX.4, показывает, что $T * f$ есть функция из C^∞ (но не обязательно полиномиально ограниченная) и что справедливо равенство (IX.3).

Мы уже ввели понятие «аппроксимативной единицы» в § VIII.1. Теперь дадим

Определение. Пусть $j(x)$ — положительная функция из C^∞, носитель которой лежит внутри единичной сферы с центром в начале координат в $\mathbb{R}^n$, причем $\int j(x)\,dx = 1$. Последовательность функций $j_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} j(x/\varepsilon)$ называется **аппроксимативной единицей**.

Предложение. Предположим, что $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица. Тогда $T * j_\varepsilon \to T$ слабо при $\varepsilon \to 0$.

Доказательство. Если $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $(T * j_\varepsilon)(\varphi) = T(\tilde{j}_\varepsilon * \varphi)$ и достаточно показать, что $\tilde{j}_\varepsilon * \varphi \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \varphi$, а для этого в свою очередь достаточно показать, что $(2\pi)^{n/2} \hat{j}_\varepsilon \hat{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{S}} \hat{\varphi}$. Так как $\hat{j}_\varepsilon(\lambda) = \hat{j}(\varepsilon\lambda)$ и $\hat{j}(0) = (2\pi)^{-n/2}$, то последовательность $(2\pi)^{n/2} \hat{j}_\varepsilon(x)$ сходится к 1 (равномерно на компактных множествах) и равномерно ограничена. Аналогично, $D^\alpha \hat{j}_\varepsilon$ равномерно сходится к нулю. Отсюда следует, что $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\varepsilon\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{S}} \hat{\varphi}$. ∎

IX.2. Область значений преобразования Фурье. Классические пространства

Мы определили преобразование Фурье на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. В этом разделе и далее в § IX.3 и IX.9 мы исследуем область значений преобразования Фурье, когда это преобразование сужено на различные подмножества из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Подобные задачи очень естественны и имеют исторический интерес, но, что важнее,— описание области значений преобразования Фурье очень полезно само по себе. В самом деле, часто легко изучить фурье-образ функции и хотелось бы знать, что из этого следует для самой функции. Начнем с двух теорем, легко вытекающих из построений § IX.1.

Теорема IX.6 (теорема Планшереля). Преобразование Фурье однозначно продолжается до унитарного отображения $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Обратное преобразование однозначно продолжается до сопряженного отображения.

Доказательство. Следствие теоремы IX.1 утверждает, что если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Так как $\mathscr{F}[\mathscr{S}] = \mathscr{S}$, то $\mathscr{F}$ — сюръективная изометрия на $L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Теорема IX.7 (лемма Римана—Лебега). Преобразование Фурье однозначно продолжается до ограниченного отображения из $L^1(\mathbb{R}^n)$ во множество $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞.

Доказательство. Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ известно, что $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Оценка

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

тривиальна. Преобразование Фурье является, следовательно, ограниченным линейным отображением в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ множества, плотного в $L^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме об ограниченном линейном отображении оно однозначно продолжается до ограниченного линейного отображения всего пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Заметим, что преобразование Фурье переводит $L^1(\mathbb{R}^n)$ «в», а не «на» $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (задача 16).

Свойства основных функций позволяют заключить, что продолжения преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ суть сужения преобразования Фурье, заданного на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, однако полезно иметь