(равномерно на компактных множествах) и равномерно ограничена. Аналогично, $D^\alpha \hat{j}_\varepsilon$ равномерно сходится к нулю. Отсюда следует, что $(2\pi)^{n/2}\hat{j}_\varepsilon\hat{\varphi} \xrightarrow{\mathscr{S}} \hat{\varphi}$. ∎

IX.2. Область значений преобразования Фурье. Классические пространства

Мы определили преобразование Фурье на $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. В этом разделе и далее в § IX.3 и IX.9 мы исследуем область значений преобразования Фурье, когда это преобразование сужено на различные подмножества из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Подобные задачи очень естественны и имеют исторический интерес, но, что важнее,— описание области значений преобразования Фурье очень полезно само по себе. В самом деле, часто легко изучить фурье-образ функции и хотелось бы знать, что из этого следует для самой функции. Начнем с двух теорем, легко вытекающих из построений § IX.1.

Теорема IX.6 (теорема Планшереля). Преобразование Фурье однозначно продолжается до унитарного отображения $L^2(\mathbb{R}^n)$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Обратное преобразование однозначно продолжается до сопряженного отображения.

Доказательство. Следствие теоремы IX.1 утверждает, что если $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$. Так как $\mathscr{F}[\mathscr{S}] = \mathscr{S}$, то $\mathscr{F}$ — сюръективная изометрия на $L^2(\mathbb{R}^n)$. ∎

Теорема IX.7 (лемма Римана—Лебега). Преобразование Фурье однозначно продолжается до ограниченного отображения из $L^1(\mathbb{R}^n)$ во множество $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ непрерывных функций, исчезающих на ∞.

Доказательство. Для $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ известно, что $\hat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\hat{f} \in C_\infty(\mathbb{R}^n)$. Оценка

$$\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$$

тривиальна. Преобразование Фурье является, следовательно, ограниченным линейным отображением в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ множества, плотного в $L^1(\mathbb{R}^n)$. По теореме об ограниченном линейном отображении оно однозначно продолжается до ограниченного линейного отображения всего пространства $L^1(\mathbb{R}^n)$ в $C_\infty(\mathbb{R}^n)$. ∎

Заметим, что преобразование Фурье переводит $L^1(\mathbb{R}^n)$ «в», а не «на» $C_\infty(\mathbb{R}^n)$ (задача 16).

Свойства основных функций позволяют заключить, что продолжения преобразования Фурье на $L^1(\mathbb{R}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^n)$ суть сужения преобразования Фурье, заданного на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, однако полезно иметь для них явные интегральные представления. В случае $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ построить такое представление легко, так как можно найти такие $f_m \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, что $\|f-f_m\|_1 \to 0$. Тогда для каждого λ имеем

$$\begin{aligned}\hat{f}(\lambda) &= \lim_{m\to\infty} \hat{f}_m(\lambda) = \\ &= \lim_{m\to\infty}\left\{\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} f_m(x)\,dx\right\} = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx.\end{aligned}$$

Итак, преобразование Фурье функции из $L^1(\mathbb{R}^n)$ задается обычной формулой.

Предположим теперь, что $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$, и пусть

$$\chi_R(x) = \begin{cases} 1, & |x| \leqslant R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

Тогда $\chi_R f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и $\chi_R f \xrightarrow[R\to\infty]{L^2} f$, так что по теореме Планшереля $\widehat{\chi_R f} \xrightarrow[R\to\infty]{L^2} \hat{f}$. Для $\chi_R f$ имеем обычную формулу, поэтому

$$\hat{f}(\lambda) = \operatorname*{l.i.m.}_{R\to\infty} (2\pi)^{-n/2} \int_{|x|\leqslant R} e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx,$$

где под l.i.m. понимается предел по L^2-норме. Иногда мы будем опускать условие $|x| \leqslant R$ и для $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ будем писать просто

$$\hat{f}(\lambda) = \text{l.i.m.}\,(2\pi)^{-n/2}\int e^{-i\lambda\cdot x} f(x)\,dx.$$

Выше было доказано, что $L^2(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} L^2(\mathbb{R}^n)$ и $L^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{\wedge} L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (очевидно, что $C_\infty(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$) и в обоих случаях преобразование $\hat{}$ — ограниченный оператор. Именно в таких ситуациях можно использовать интерполяционные теоремы, которые будут доказаны в дополнении к § 4.

Теорема IX.8 (неравенство Хаусдорфа — Юнга). Пусть $1 \leqslant q \leqslant 2$ и $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда преобразование Фурье — ограниченное отображение $L^q(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и его норма не превосходит $(2\pi)^{n(1/2-1/q)}$.

Доказательство. Применим теорему Рисса — Торина (теорему IX.17) при $q_0 = 2 = p_0$, $p_1 = \infty$ и $q_1 = 1$. Поскольку $\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2$ и $\|\hat{f}\|_\infty \leqslant (2\pi)^{-n/2}\|f\|_1$, заключаем, что $\|\hat{f}\|_{p_t} \leqslant C_t\|f\|_{q_t}$, где $p_t^{-1} = (1-t)/2$, $q_t^{-1} = (1-t)/2 + t = 1 - p_t^{-1}$, а $\log C_t = t\log(2\pi)^{-n/2}$. ∎

Теперь мы переходим к следующему естественному вопросу. Что такое фурье-образы конечных положительных мер на $\mathbb{R}^n$? Допустим, что по определению

$$\hat{\mu}(\lambda) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x}\, d\mu(x).$$

Тогда если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то

$$\int_{\mathbb{R}^n} \hat{\mu}(\lambda)\varphi(\lambda)\, d\lambda = (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} d\mu(x) \right) \varphi(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\lambda\cdot x} \varphi(\lambda)\, d\lambda \right) d\mu(x) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\varphi}(x)\, d\mu(x),$$

и мы видим, что такое определение совпадает с сужением преобразования Фурье, заданного на $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, на положительные меры. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}^n$ и $\xi = \langle \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N \rangle \in \mathbb{C}^N$. Тогда

$$\sum_{i,j=1}^{N} \hat{\mu}(\lambda_i - \lambda_j)\bar{\xi}_j \xi_i = \int \left| \sum_{i=1}^{N} \xi_i e^{-i\lambda_i\cdot x} \right|^2 d\mu(x) \geqslant 0.$$

Это показывает, что функция $\hat{\mu}(\lambda)$ обладает следующим свойством: для любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}^n$ матрица $\{\hat{\mu}(\lambda_i - \lambda_j)\}$ определяет положительный оператор на $\mathbb{C}^N$. Далее, по теореме о мажорированной сходимости $\hat{\mu}$ непрерывна, а поскольку

$$|\hat{\mu}(\lambda)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-i\lambda\cdot x}|\, d\mu(x) =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \mu(\mathbb{R}^n),$$

то функция $\hat{\mu}(\cdot)$ также и ограничена.

Определение. Комплекснозначная ограниченная непрерывная функция f на $\mathbb{R}^n$, для которой $\{f(\lambda_i - \lambda_j)\}_{i,j}$ — положительная матрица на $\mathbb{C}^N$ при каждом N и любых $\lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{R}^n$, называется **положительно определенной функцией**.

Из этого определения сразу следуют такие три свойства положительно определенных функций. Пусть $N = 1$, $x \in \mathbb{R}^n$; тогда

$$(1) \qquad f(0) \geqslant 0,$$

поскольку значение $f(0)$ должно быть положительным оператором на $\mathbb{C}^1$. Полагая $N = 2$ и выбирая $\lambda_1 = x$, $\lambda_2 = 0$, видим, что матрица

$$\begin{pmatrix} f(0) & f(\mathrm{x}) \\ \overline{f(-\mathrm{x})} & f(0) \end{pmatrix}$$

должна быть положительной, а потому самосопряженной с положительным детерминантом. Это означает, что

$$f(\mathrm{x}) = \overline{f(-\mathrm{x})}, \tag{2}$$

$$|f(\mathrm{x})| \leqslant f(0). \tag{3}$$

Отметим, что, доказывая эти три свойства, мы нигде не пользовались ограниченностью $f(\mathrm{x})$, так что можно было опустить слово *ограниченная* в определении и получить ограниченность как следствие свойства (3). Очевидно, что всевозможные выпуклые комбинации или произведения на положительные скаляры положительно определенных функций вновь дают положительно определенные функции, так что эти функции образуют конус.

Теорема IX.9 (теорема Бохнера). *Множество фурье-образов конечных положительных мер на $\mathbb{R}^n$ составляет в точности конус положительно определенных функций.*

Доказательство. Мы приводим не оригинальное доказательство Бохнера, а несложное, но интересное построение, основанное на теореме Стоуна. Уже было показано, что фурье-образы конечных положительных мер суть положительно определенные функции. Требуется доказать обратное. Предположим, что f положительно определена. Пусть $\mathcal{K}^\circ$ — множество комплекснозначных функций на $\mathbb{R}^n$, каждая из которых отлична от нуля лишь в конечном числе точек. Тогда для φ, $\psi \in \mathcal{K}^\circ$ величина

$$(\psi, \varphi)_f = \sum_{\mathrm{x},\, \mathrm{y} \in \mathbb{R}^n} f(\mathrm{x}-\mathrm{y}) \overline{\psi(\mathrm{x})} \varphi(\mathrm{y})$$

обладает всеми свойствами корректно определенного внутреннего произведения, за исключением того, что $(\varphi, \varphi)_f$ может обращаться в нуль для некоторых $\varphi \neq 0$. Пусть $\mathcal{N}$ — множество таких φ; тогда $\mathcal{K}^\circ/\mathcal{N}$ — предгильбертово пространство с внутренним произведением $(\cdot, \cdot)_f$. Пусть $\mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$; определим оператор U_t на $\mathcal{K}^\circ$ формулой $(U_\mathrm{t}\varphi)(\mathrm{x}) = \varphi(\mathrm{x}-\mathrm{t})$. Так как U_t сохраняет форму $(\cdot, \cdot)_f$, то он переводит классы эквивалентности в классы эквивалентности, а потому сводится к изометрии на $\mathcal{K}^\circ/\mathcal{N}$. Поскольку то же самое справедливо и для $U_{-\mathrm{t}}$, эта изометрия имеет плотную область значений и, следовательно, продолжается до унитарного оператора $\tilde{U}_\mathrm{t}$ на $\mathcal{H} = \overline{\mathcal{K}^\circ/\mathcal{N}}$. Более того, $\tilde{U}_{\mathrm{t}+\mathrm{s}} = \tilde{U}_\mathrm{t}\tilde{U}_\mathrm{s}$, $\tilde{U}_0 = I$, а в силу непрерывности f группа $\tilde{U}_\mathrm{t}$ сильно непрерывна. Итак, отображение $\mathrm{t} \mapsto \tilde{U}_\mathrm{t}$ удовлетворяет условиям теоремы VIII.12 (обобщение теоремы Стоуна). Следовательно, существует проекторнозначная мера P_λ на $\mathbb{R}^n$, такая, что

$$(\varphi, \tilde{U}_{\mathbf{t}}\psi)_f = \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\mathbf{t}\cdot\lambda} d(\varphi, P_\lambda\psi)_f.$$

Пусть $\tilde{\varphi}_0$ — класс эквивалентности, содержащий функцию

$$\varphi_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{если } \mathbf{x} = 0, \\ 0, & \text{если } \mathbf{x} \neq 0. \end{cases}$$

Тогда

$$f(\mathbf{t}) = (\tilde{U}_{\mathbf{t}}\tilde{\varphi}_0, \tilde{\varphi}_0)_f = (\tilde{\varphi}_0, \tilde{U}_{-\mathbf{t}}\tilde{\varphi}_0)_f = \int e^{-i\mathbf{t}\cdot\lambda} d(\tilde{\varphi}_0, P_\lambda\tilde{\varphi}_0)_f,$$

так что мы представили f как фурье-образ конечной положительной меры. ∎

Понятие положительной определенности можно обобщить на распределения. Если функция $f(x)$ ограничена и непрерывна, то она положительно определена тогда и только тогда, когда

$$\iint f(x-y)\overline{\varphi(y)}\varphi(x)\,dx\,dy \geqslant 0 \qquad \text{(IX.4)}$$

для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Чтобы убедиться в этом, достаточно аппроксимировать интеграл в (IX.4) римановыми суммами. Это условие можно переписать так:

$$\iint f(\tau)\overline{\varphi(x-\tau)}\varphi(x)\,d\tau\,dx = \int f(\tau)(\bar{\tilde{\varphi}} * \varphi)(\tau)\,d\tau \geqslant 0, \qquad \text{(IX.5)}$$

где $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(-x)$. Это подсказывает нам следующее

Определение. Обобщенная функция $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется **положительно определенной**, если $T(\bar{\tilde{\varphi}} * \varphi) \geqslant 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Следующее обобщение теоремы Бохнера принадлежит Шварцу. Оно особенно интересно, так как из него следует, что положительно определенные обобщенные функции с необходимостью суть обобщенные функции умеренного роста. Основные моменты доказательства намечены в задаче 20 (подробные ссылки см. в Замечаниях).

Теорема IX.10 (теорема Бохнера—Шварца). Обобщенная функция $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ положительно определена в том и только том случае, когда $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и T — фурье-образ положительной меры не более чем полиномиального роста.

Из этой теоремы следует, что если $f(x)$ — положительно определенная функция, то слабые производные $(-\Delta)^m f$ — положительно определенные обобщенные функции. Действительно, мера

$\mu = \hat{f}$ по теореме IX.9 конечна, а тогда $\widehat{(-\Delta)^m f} = |x|^{2m}\mu$ — положительная мера полиномиального роста.

Определим теперь, какие ограниченные измеримые функции оказываются положительно определенными обобщенными функциями. Ограниченная измеримая функция f на $\mathbb{R}^n$ называется **слабо положительно определенной**, если справедливо (IX.4). Поскольку (IX.5) следует из (IX.4), то распределение

$$T_f(\varphi) = \int f(x)\varphi(x)\,dx$$

положительно определено, а потому $\hat{T}_f = \mu$ — полиномиально ограниченная положительная мера. Если $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица, симметричная относительно начала координат, то

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty \geqslant T_f(j_\varepsilon * j_\varepsilon) &= \hat{T}_f((\widecheck{j_\varepsilon * j_\varepsilon})) = \\ &= (2\pi)^{n/2}\mu(|\check{j}_\varepsilon(x)|^2) = \\ &= (2\pi)^{n/2}\int |\check{j}_\varepsilon(x)|^2\,d\mu(x).\end{aligned}$$

На каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$ функция $\check{j}_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно стремится к $(2\pi)^{-n/2}$, так что μ-мера произвольного компактного множества меньше $(2\pi)^{n/2}\|f\|_\infty$, т. е. μ конечна.

В итоге мы попадаем в интересную ситуацию. Поскольку μ конечна, ее фурье-образ — непрерывная положительно определенная функция. А поскольку $\check{\mu}$ и f должны совпадать почти всюду, то справедливо такое

Предложение. Ограниченная слабо положительно определенная функция почти всюду равна непрерывной положительно определенной функции.

IX.3. Область значений преобразования Фурье. Аналитичность

В этом разделе мы исследуем связь между свойствами убывания функции или обобщенной функции на бесконечности и свойствами аналитичности ее преобразования Фурье. Самые радикально убывающие на бесконечности функции — это функции с компактным носителем. Мы докажем теоремы Пэли — Винера и Шварца, явно описывающие фурье-образы функций из C^∞ и распределений с компактным носителем. Затем будут сформулированы две теоремы, связывающие экспоненциальное убывание со свойствами аналитичности фурье-образов. И в заключение этого раздела мы опишем фурье-образы обобщенных функций умеренного роста, носители которых лежат в симметричных ко-