$\mu=\hat{f}$ по теореме IX.9 конечна, а тогда $\widehat{(-\Delta)^m f}=|x|^{2m}\mu$ — положительная мера полиномиального роста.

Определим теперь, какие ограниченные измеримые функции оказываются положительно определенными обобщенными функциями. Ограниченная измеримая функция f на $\mathbb{R}^n$ называется **слабо положительно определенной**, если справедливо (IX.4). Поскольку (IX.5) следует из (IX.4), то распределение

$$T_f(\varphi)=\int f(x)\varphi(x)\,dx$$

положительно определено, а потому $\hat{T}_f=\mu$ — полиномиально ограниченная положительная мера. Если $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица, симметричная относительно начала координат, то

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty &\geqslant T_f(j_\varepsilon * j_\varepsilon)=\hat{T}_f((\widecheck{j_\varepsilon * j_\varepsilon}))=\\ &=(2\pi)^{n/2}\mu(|\check{j}_\varepsilon(x)|^2)=\\ &=(2\pi)^{n/2}\int|\check{j}_\varepsilon(x)|^2\,d\mu(x).\end{aligned}$$

На каждом компактном подмножестве из $\mathbb{R}^n$ функция $\check{j}_\varepsilon(x)$ при $\varepsilon\to 0$ равномерно стремится к $(2\pi)^{-n/2}$, так что μ-мера произвольного компактного множества меньше $(2\pi)^{n/2}\|f\|_\infty$, т. е. μ конечна.

В итоге мы попадаем в интересную ситуацию. Поскольку μ конечна, ее фурье-образ — непрерывная положительно определенная функция. А поскольку $\check{\mu}$ и f должны совпадать почти всюду, то справедливо такое

Предложение. Ограниченная слабо положительно определенная функция почти всюду равна непрерывной положительно определенной функции.

IX.3. Область значений преобразования Фурье. Аналитичность

В этом разделе мы исследуем связь между свойствами убывания функции или обобщенной функции на бесконечности и свойствами аналитичности ее преобразования Фурье. Самые радикально убывающие на бесконечности функции — это функции с компактным носителем. Мы докажем теоремы Пэли — Винера и Шварца, явно описывающие фурье-образы функций из C^∞ и распределений с компактным носителем. Затем будут сформулированы две теоремы, связывающие экспоненциальное убывание со свойствами аналитичности фурье-образов. И в заключение этого раздела мы опишем фурье-образы обобщенных функций умеренного роста, носители которых лежат в симметричных конусах. Есть еще целый ряд теорем такого же типа. Некоторые из них обсуждаются в замечаниях.

Предположим, что $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда для всех $\zeta = \langle \zeta_1, \ldots, \zeta_n \rangle \in \mathbb{C}^n$ определен интеграл

$$\hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{-i\zeta\cdot x} f(x)\, dx.$$

Более того, $\hat{f}(\zeta)$ — целая аналитическая функция от n комплексных переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, поскольку мы можем дифференцировать под знаком интеграла. Далее, если носитель f содержится в сфере радиуса R, то интегрирование по частям дает

$$\prod_{i=1}^{n} (i\zeta_i)^{\alpha_i} \hat{f}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{|x| \leqslant R} e^{-i\zeta\cdot x} D^\alpha f(x)\, dx.$$

Взяв абсолютное значение обеих частей и воспользовавшись ограниченностью $\hat{f}(\zeta)$ на множестве $\{\zeta \mid |\operatorname{Im}\zeta| < \varepsilon\}$, легко находим, что для каждого N

$$|\hat{f}(\zeta)| \leqslant \frac{C_N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N} \quad \text{при всех } \zeta \in \mathbb{C}^n,$$

где C_N — константа, зависящая от N и f. Интересно то, что эти оценки не только необходимы, но и достаточны для того, чтобы функция f принадлежала $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема IX.11 (теорема Пэли — Винера). Целая аналитическая функция $g(\zeta)$ от n комплексных переменных является фурье-образом функции из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре $\{x \mid |x| \leqslant R\}$ тогда и только тогда, когда для каждого N существует такая константа C_N, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}^n$

$$|g(\zeta)| \leqslant \frac{C_N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N}. \qquad \text{(IX.6)}$$

Доказательство. Утверждение «только тогда» уже доказано. Предположим, что функция g целая и удовлетворяет оценке (IX.6). Пусть $\zeta = \lambda + i\eta$, где $\lambda, \eta \in \mathbb{R}^n$. Тогда при каждом η функция $g(\lambda + i\eta) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ как функция λ, так как в силу (IX.6) и формулы Коши ее производные убывают как обратный полином. Пусть

$$f(x) = (2\pi)^{-n/2} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\lambda} g(\lambda)\, d\lambda. \qquad \text{(IX.7)}$$

Тогда, по теореме IX.1, $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $g(\lambda) = \hat{f}(\lambda)$. Следует показать, что носитель $f(x)$ содержится в шаре радиуса R. В силу неравенства (IX.6) и теоремы Коши можно сдвинуть область интегрирования в (IX.7) так, чтобы выполнялось равенство

$$f(x)=(2\pi)^{-n/2}\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda+i\eta)\cdot x} g(\lambda+i\eta)\,d\lambda. \qquad \text{(IX.8)}$$

Еще раз применяя (IX.6), имеем

$$|f(x)|\leqslant e^{R|\eta|-x\cdot\eta}(2\pi)^{-n/2}\int \frac{C_N}{(1+|\lambda+i\eta|)^N}\,d\lambda\leqslant$$
$$\leqslant e^{R|\eta|-x\cdot\eta}(2\pi)^{-n/2}\int \frac{C_N}{(1+|\lambda|)^N}\,d\lambda,$$

где N выбрано достаточно большим, чтобы интеграл в правой части сходился. Но $f(x)$ не зависит от η, поэтому, устремляя η к ∞ в подходящем направлении, мы убедимся в том, что $|f(x)|=0$ при $|x|>R$. ∎

Эта теорема допускает естественное обобщение на случай распределений с компактным носителем. Напомним, что обобщенная функция $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет носитель в замкнутом множестве K тогда и только тогда, когда $T(\varphi)=0$ для любой основной функции φ с носителем в $\mathbb{R}^n\setminus K$. Если множество K компактно, то говорят, что T имеет **компактный носитель.** Множество обобщенных функций с компактным носителем образует пространство, дуальное к $\mathcal{E}(\mathbb{R}^n)$ (см. задачи 39 и 40 из гл. V).

Теорема IX.12. Обобщенная функция $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель тогда и только тогда, когда $\hat{T}$ допускает аналитическое продолжение до целой аналитической функции $\hat{T}(\zeta)$ от n переменных, удовлетворяющей условию

$$|\hat{T}(\zeta)|\leqslant C(1+|\zeta|)^N e^{R|\operatorname{Im}\zeta|} \qquad \text{(IX.9)}$$

для всех $\zeta\in\mathbb{C}^n$ и некоторых констант C, N, R. Более того, если выполнено (IX.9), то носитель T содержится в шаре радиуса R.

Доказательство. Предположим, что $T\in\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель, и пусть φ — функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, равная единице на носителе T. Положим $F(\zeta)=T\left[(2\pi)^{-n/2}e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)\right]$. По теореме IX.5, $F(\lambda+i0)$ — фурье-образ T. Далее, поскольку

$$\left(\frac{\exp\left(-i\left(x_j(\zeta_j+h_j)+\sum\limits_{k\neq j}\zeta_k x_k\right)\right)\varphi(x)-e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)}{h_j}\right)\longrightarrow$$
$$\xrightarrow{\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)} -ix_j e^{-i\zeta\cdot x}\varphi(x)$$

и $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то функция $F(\zeta)$ дифференцируема в комплексном смысле по каждой переменной, а потому целая.

Поскольку $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, то

$$|T(f)| \leqslant C_1 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \|x^\alpha D^\beta f\|_\infty$$

для некоторых N и C_1 и всех $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Итак, если носитель φ лежит внутри сферы радиуса R, то

$$|F(\zeta)| \leqslant C_2(1+R^n)(1+|\zeta|^N)\, e^{|\operatorname{Im}\zeta| R}.$$

Обратно, предположим, что $F(\zeta)$ — целая функция, удовлетворяющая оценке (IX.9). Тогда $F(\lambda + i0) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, т. е. $F(\lambda+i0)$ — фурье-образ некоторого распределения $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Пусть $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица. Тогда, по теореме IX.4, $\widehat{T*j_\varepsilon} = (2\pi)^{-n/2}\hat{j}_\varepsilon(\lambda) F(\lambda)$. Поскольку j_ε имеет компактный носитель в $\{x \mid |x| \leqslant \varepsilon\}$, то, согласно теореме Пэли — Винера, для каждого M найдется такая константа C_M, что

$$|\hat{j}_\varepsilon(\zeta)| \leqslant \frac{C_M}{(1+|\zeta|)^{N+M}}\, e^{\varepsilon|\operatorname{Im}\zeta|}.$$

Поэтому

$$|(2\pi)^{-n/2}\hat{j}_\varepsilon(\zeta) F(\zeta)| \leqslant \frac{C_M C e^{(R+\varepsilon)|\operatorname{Im}\zeta|}}{(1+|\zeta|)^N},$$

откуда следует (снова по теореме Пэли — Винера), что носитель $T*j_\varepsilon$ содержится внутри сферы радиуса $R+\varepsilon$. Поскольку ε произвольно и $(T*j_\varepsilon) \to T$ слабо, мы заключаем, что носитель T содержится в шаре радиуса R с центром в начале координат. ∎

Один из естественных способов обобщить предыдущие теоремы состоит в том, чтобы заменить «условие компактности носителя» некоторым более слабым условием убывания на бесконечности. Две следующие теоремы (доказательства которых намечены в задаче 76) будут использованы в гл. XIII для доказательства того, что собственные функции, отвечающие связанным состояниям атомных гамильтонианов, экспоненциально убывают.

Теорема IX.13. Пусть $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$. В таком случае $e^{b|x|} f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при всех $b < a$ тогда и только тогда, когда $\hat{f}$ имеет аналитическое продолжение на множество $\{\zeta \mid |\operatorname{Im}\zeta| < a\}$, причем для каждого $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| < a$, функция $\hat{f}(\cdot + i\eta) \in L^2(\mathbb{R}^n)$ и для любого $b < a$

$$\sup_{|\eta| \leqslant b} \|\hat{f}(\cdot + i\eta)\|_2 < \infty.$$

Теорема IX.14. Пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Предположим, что $\hat{T}$ — функция, допускающая аналитическое продолжение на множество $\{\zeta \mid |\operatorname{Im}\zeta| < a\}$ для некоторого $a > 0$. Предположим также, что для каждого $\eta \in \mathbb{R}^n$, $|\eta| < a$, функция $\hat{T}(\cdot + i\eta) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и для любого $b < a$

$$\sup_{|\eta| < b} \|\hat{T}(\cdot + i\eta)\|_1 < \infty.$$

Тогда T — ограниченная непрерывная функция, и для любого $b < a$ существует такая константа C_b, что

$$|T(x)| \leqslant C_b e^{-b|x|}.$$

Теоремы Пэли — Винера полезны для понимания некоторого класса теорем об аналитическом пополнении из теории функций многих комплексных переменных. Основной факт иллюстрируется следующим простым примером. Пусть D_r — полидиск, $D_r = \{\langle z, w\rangle \mid |z| < r, |w| < r\}$ в $\mathbb{C}^2$. Предположим, что f — аналитическая функция двух переменных в «поликольце» $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$. Тогда для любого z из $1/2 < |z| < 1$ функция $g_z(w) \equiv f(z, w)$ аналитична в единичном круге, а для любого z из $|z| \leqslant 1/2$ эта же функция аналитична в кольце $1/2 < w < 1$. Итак, для каждого z существует лораново разложение

$$g_z(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z) w^n,$$

причем $a_n(z) = 0$ при $n < 0$ и $1 > |z| > 1/2$. Но, как легко видеть, $a_n(z)$ — аналитические функции z, так что $a_n(z) = 0$ при $n < 0$ и $|z| < 1$. Отсюда следует, что f допускает продолжение с $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$ на весь D_1! Этот факт демонстрирует поразительное отличие от случая одной переменной, где для любого заданного открытого связного множества $\Omega \subset \mathbb{C}$ можно найти функцию f, аналитическую на Ω и не аналитическую ни на одном большем множестве.

Определение. Открытое связное множество $\Omega \subset \mathbb{C}$ называется **областью голоморфности**, если для любой точки $w \notin \Omega$ существует функция f, аналитическая в Ω, но не имеющая продолжения в w. Пусть $\Omega \subset \hat{\Omega} \subset \mathbb{C}^n$ — открытые связные множества. Множество $\hat{\Omega}$ называют **аналитическим пополнением** или **оболочкой голоморфности** Ω, если

(i) $\hat{\Omega}$ — область голоморфности.

(ii) Каждая функция, аналитическая в Ω, допускает продолжение на всю $\hat{\Omega}$.

В силу этого определения, не каждая открытая связная область обладает оболочкой голоморфности, однако если обобщить определение, допуская области $\hat{\Omega}$ многолистной структуры, то каждая Ω будет иметь единственную оболочку голоморфности. В предыдущем примере D_1 — оболочка голоморфности области $D_1 \setminus \bar{D}_{1/2}$. Мы уже видели, что D_1 удовлетворяет условию (ii). Чтобы убедиться, что справедливо и (i), докажем такое

Предложение. Если $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ — произвольное открытое связное выпуклое множество, то Ω — оболочка голоморфности.

Доказательство. Для заданной точки $w \notin \Omega$ по теореме Хана — Банаха можно найти вещественный линейный функционал $l: \mathbb{C}^n \to \mathbb{R}$, такой, что $l(w) > \sup\limits_{z \in \Omega} l(z)$. Пусть

$$L(z) = l(z) - il(iz)$$

и $f(z) = M(L(z) - L(w))^{-1}$. Тогда функция f аналитична в Ω, поскольку $\operatorname{Re} L(z) \neq \operatorname{Re} L(w)$ для $z \in \Omega$, но сингулярна в точке w. ∎

Идеи Пэли—Винера полезны при рассмотрении оболочек голоморфности некоторых специальных областей.

Определение. Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто. **Трубой над** S (обозначается $\mathcal{T}(S)$) называется множество

$$\mathcal{T}(S) = \{x + iy \mid x \in \mathbb{R}^n,\ y \in S\}.$$

Теорема IX.14.1 (теорема Бохнера о трубе). Пусть множество $S \subset \mathbb{R}^n$ открыто, и пусть $\hat{S}$ — его открытая выпуклая оболочка. Тогда $\mathcal{T}(\hat{S})$ — оболочка голоморфности $\mathcal{T}(S)$.

Набросок доказательства. Из предыдущего предложения следует, что каждая $\mathcal{T}(\hat{S})$ — область голоморфности, так что достаточно доказать свойство (ii). Мы приведем набросок доказательства несколько более слабого результата, состоящего в том, что любая полиномиально ограниченная функция $f(z)$ на $\mathcal{T}(S)$ продолжается на $\mathcal{T}(\hat{S})$. Поскольку произвольную f можно заменить, например, функцией $e^{-z^2} f(z)$, это не является существенным ограничением, и общий результат может быть получен на основе этого частного случая. Выполнив сдвиг, можно без потери общности считать, что $0 \in S$. Пусть $g_y(x) = f(x + iy)$. При каждом $y \in S$ g_y есть распределение умеренного роста, так что можно ввести $T_y = \check{g}_y$. С помощью метода Пэли—Винера можно показать, что $T_y(x) = e^{x \cdot y} T_0(x)$. Итак, T_0 — распределение умеренного роста, для которого $e^{x \cdot y} T_0(x)$ — тоже распределение умеренного роста при всех $y \in S$. В силу приведенной ниже леммы, это справедливо для всех $y \in \hat{S}$, а тогда, обращая построение Пэли—Винера, находим, что $\hat{T}_0$ аналитична на $\mathcal{T}(\hat{S})$. ∎

Лемма. Пусть $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$. Тогда множество таких y, что $e^{x\cdot y}T(x) \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, выпукло.

Доказательство. Поскольку выпуклость определяется с помощью линейных отрезков, нетрудно видеть, что достаточно показать, что если T и $e^{\lambda}T(\lambda)$ лежат в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, то и $e^{\theta\lambda}T(\lambda)$ лежит в $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ при всех $\theta \in (0, 1)$. Пусть ϕ_n есть n-я функция Эрмита (см. дополнение к § V.3). Введем функции

$$g_n(z) = \int T(\lambda)\, e^{iz\lambda}\phi_n(\lambda)\, d\lambda.$$

Функции g_n целые, поскольку $e^{iz\lambda}\phi_n(\lambda) \in S$. Так как $T, e^{\lambda}T(\lambda) \in \mathcal{S}'$, находим, что

$$|g_n(x)| \leqslant C(1+n^2)^m(2+x^2)^m,$$
$$|g_n(x-i)| \leqslant C(1+n^2)^m(2+x^2)^m$$

для подходящих C и m. Применяя принцип максимума к $(2+z^2)^{-m-1}g_n(z)$, видим, что $|g_n(-i\theta)| \leqslant D(1+n^2)^m$ для всех θ из интервала $(0, 1)$, так что $e^{\theta\lambda}T(\lambda) \in \mathcal{S}'$. ∎

Этот метод идеально приспособлен для применения в некоторых «вырожденных случаях». Так, при рассмотрении приведенного ниже результата следует иметь в виду случай множества $S = \{\langle y_1, y_2\rangle \mid y_1 = 0$ или $y_2 = 0;\ |y_1| + |y_2| < 1\}$, которое *не является* открытым.

Теорема IX.14.2 (теорема о трубе, вырожденный случай). Пусть $T_1(x_1, z_2)$ и $T_2(z_1, x_2)$—обобщенные функции умеренного роста по переменным $x\,(x \in \mathbb{R}^n)$ и полиномиально ограниченные аналитические функции по переменным z в области $\{z \in \mathbb{C}^n \mid |\operatorname{Im} z| < 1\}$, т. е. $T_1(x_1, z_2)$ при каждом z_2 есть обобщенная функция по x_1 и интеграл $\int g(x_1)T(x_1, z_2)\,dx_1$ аналитичен. Предположим, что $T_1(x_1, x_2 + i0) = T_2(x_1 + i0, x_2)$ в смысле обобщенных функций по обоим переменным. Тогда существует функция $f(z_1, z_2)$, аналитическая в $\mathcal{T}(\tilde{S})$, где $\tilde{S} = \{\langle y_1, y_2\rangle \mid |y_1| + |y_2| < 1\}$, такая, что $T_1(x_1, z_2) = f(x_1 + i0, z_2)$ и $T_2(z_1, x_2) = f(z_1, x_2 + i0)$.

Доказательство. Пусть $g(\lambda) = \check{T}_1(\cdot, \cdot + i0)(\lambda)$. Тогда по предположению $e^{\theta\lambda_1}g(\lambda)$ и $e^{\theta\lambda_2}g(\lambda)$ лежат в $\mathcal{S}'$ при $-1 < \theta < 1$, так что $e^{a\cdot\lambda}g(\lambda) \in \mathcal{S}'$ для $|a_1| + |a_2| < 1$, что и доказывает теорему. ∎

Следующий естественный вопрос: каковы аналитические свойства функции (обобщенной функции) с носителем на луче, в полупространстве или, более общо, в конусе? В качестве простого примера рассмотрим фурье-образ $\hat{f}$ некоторой функции $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ с носителем, содержащимся в $[0, \infty)$. Читатель может легко проверить, что

$$\hat{f}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-1/2} \int e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} f(x)\, dx \qquad \text{(IX.10)}$$

— аналитическая функция, определенная в открытой нижней полуплоскости (т. е. при $\eta > 0$), и что $\hat{f}(\cdot - i\eta) \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R})} \hat{f}$ при $\eta \downarrow 0$. Это означает, что $\hat{f}$, которая не обязана быть вещественно аналитической, есть «граничное значение» функции, аналитической в нижней полуплоскости. Изучение преобразований Фурье функций и распределений с носителями в полупространствах восходит к классическим исследованиям преобразования Лапласа и сыграло важную роль в современном анализе. Основные идеи и технические приемы здесь аналогичны употреблявшимся в теоремах IX.11 и IX.12. Однако имеется дополнительная трудность, вызванная необходимостью указать, в каком смысле преобразование Фурье есть «граничное значение» аналитической функции. Существует обширная коллекция такого рода теорем. Подробно мы рассмотрим лишь ту из них, которая понадобится нам в § IX.8 при изучении квантовой теории поля; другие кратко обсуждаются в Замечаниях.

Определение. Пусть $a \in \mathbb{R}^n$, $|a| = 1$ и $\theta \in (0, \pi/2)$. Множество

$$\Gamma_{a, \theta} = \{\xi \in \mathbb{R}^n \mid \xi \cdot a > |\xi| \cos\theta\}$$

называется **конусом вокруг** a **раствора** θ. Конус $\Gamma^*_{a, \theta} \equiv \Gamma_{a, \pi/2 - \theta}$ называется **дуальным конусом**. В очевидных случаях мы будем опускать индексы и писать просто Γ и Γ^*.

Дуальный конус Γ^* либо содержит Γ (как на рис. IX.1), либо содержится в Γ. Заметим, что Γ^* — внутренность пересечения полупространств $\{\eta \mid \eta \cdot \xi > 0\}$, отвечающих $\xi \in \Gamma$. Если Γ — открытый передний световой конус в $\mathbb{R}^4$ (т. е. $\Gamma = \Gamma_{e_0, \pi/4}$, где e_0 — орт временно́й оси, и скорость света приравнена единице), то Γ^* также открытый передний световой конус. Для заданного открытого конуса $C \subset \mathbb{R}^n$ обозначим через $\mathbb{R}^n - iC$ открытую область таких $\zeta = \langle \lambda_1 - i\eta_1, \lambda_2 - i\eta_2, \ldots, \lambda_n - i\eta_n \rangle \in \mathbb{C}^n$, что $\lambda = \langle \lambda_1, \ldots, \lambda_n \rangle \in \mathbb{R}^n$ и $\eta = \langle \eta_1, \ldots, \eta_n \rangle \in C$. Область $\mathbb{R}^n - iC$ называется **трубой с базой** C.

Теперь можно объяснить, что мы понимаем под «граничным значением».

Определение. Пусть $S \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть $F(\zeta)$ — функция, аналитическая в $\mathbb{R}^n - iC$ для некоторого конуса C. Предположим, что $F(\lambda - i\eta_0)$ при каждом фиксированном $\eta_0 \in C$ есть обобщенная функция умеренного роста (т. е. растет не быстрее полинома по λ)

и что при $t \downarrow 0$ в $\mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\, \varphi(\lambda)\, d\lambda \longrightarrow S(\varphi)$$

для всех $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Тогда говорят, что S — (обобщеннозначное) **граничное значение F в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.**

Предположим, что $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и что носитель T содержится в $\bar{\Gamma}_{a,\theta}$ с некоторыми $a \in \mathbb{R}^n$ и $\theta \in (0, \pi/2)$. Если распределение T

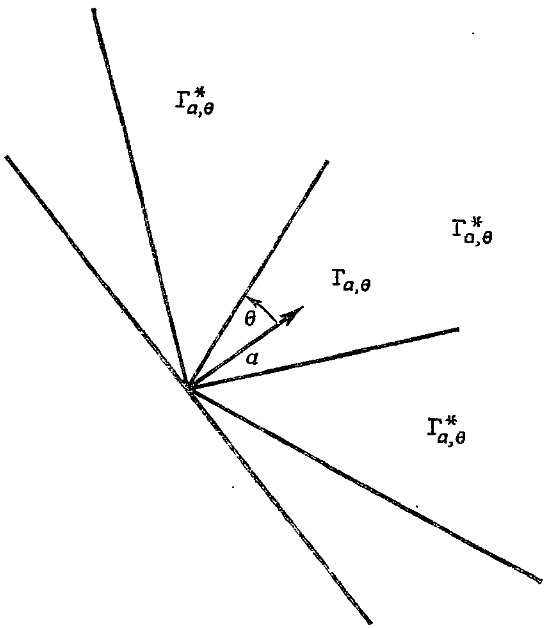

Рис. IX.1. Конусы $\Gamma_{a,\theta}$ и $\Gamma^*_{a,\theta}$.

задается функцией $T(x)$, то можно непосредственно продолжить $\hat{T}$ в трубу $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$, полагая

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x}\, T(x)\, dx.$$

Для $\eta \in \Gamma^*_{a,\theta}$ интеграл имеет смысл, поскольку

$$\left| e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} \right| = e^{-|\eta|\,|x| \cos(\eta, x)} \leqslant e^{-|x|\, d(\eta)},$$

где $d(\eta) \equiv |\eta| \min\limits_{x \in \partial\Gamma_{a,\theta}} \cos(\eta, x) = \operatorname{dist}(\eta, \partial\bar{\Gamma}^*_{a,\theta})$; см. рис. IX.1. Так как $T(x)$ полиномиально ограничена, то наличие множителя $e^{-|x|\, d(\eta)}$ означает возможность дифференцирования под знаком интеграла. Мы заключаем, что $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ аналитична в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$, поскольку она бесконечно дифференцируема в комплексном смысле. Более того, если $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$, то

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \hat{T}(\lambda - it\eta_0)\varphi(\lambda)\,d\lambda = \\ &= (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - it\eta_0)\cdot x}\varphi(\lambda)\,T(x)\,dx\,d\lambda = \\ &= \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-t\eta_0\cdot x}\hat{\varphi}(x)\,T(x)\,dx \longrightarrow \\ &\xrightarrow[t\downarrow 0]{} \int_{\Gamma_{a,\theta}} \hat{\varphi}(x)\,T(x)\,dx = \hat{T}(\varphi)\end{aligned}$$

по теореме о мажорированной сходимости. Итак, $\hat{T}$ — граничное значение функции $\hat{T}(\lambda - i\eta)$, аналитической в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$.

Если распределение T не задается функцией, а представимо в виде $P(D)G$, где G — полиномиально ограниченная непрерывная функция с носителем в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, то можно положить

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} P(i(\lambda - i\eta)) \int_{\Gamma_{a,\theta}} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} G(x)\,dx.$$

Так же, как и выше, можно показать, что функция $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и что $\hat{T}$ — ее граничное значение. Теперь мы хотим доказать, что *всякую* обобщенную функцию умеренного роста с носителем в конусе можно представить в виде $T = P(D)G$ с некоторым дифференциальным оператором в частных производных $P(D)$ и некоторой полиномиально ограниченной непрерывной функцией G *с носителем в том же конусе*. Чтобы понять, что это — сильное утверждение, читателю следует вспомнить, что аналогичное утверждение для компактных множеств (а не для конусов) неверно. Дельта-функцию, например, нельзя представить как $P(D)G$, где G имеет носитель в начале координат.

Теорема IX.15 (лемма Броса — Эпштейна — Глазера). Пусть Γ — собственный открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ и носитель T лежит в $\overline{\Gamma}$. Тогда существуют полиномиально ограниченная непрерывная функция G *с носителем в* $\overline{\Gamma}$ и дифференциальный оператор в частных производных $P(D)$, такие, что $T = P(D)G$.

Доказательство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^n$ — базис в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов, принадлежащих Γ. Каждый вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно единственным образом представить в виде $x = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, и поэтому $\{y_i\}_{i=1}^n$

можно использовать как координаты в $\mathbb{R}^n$. Введем функцию

$$F_m(y_1, \ldots, y_n) = (m!)^{-n} y_1^m y_2^m \ldots y_n^m \theta(y_1) \ldots \theta(y_n),$$

где θ — характеристическая функция множества $\{x \mid x \in \mathbb{R},\ x \geqslant 0\}$. Тогда $F_m \in C^{m-1}(\mathbb{R}^n)$ и носитель F_m лежит в $\bar{\Gamma}$. Далее, если $Q(D) = \partial^n/\partial y_1 \ldots \partial y_n$, то, как легко может проверить читатель,

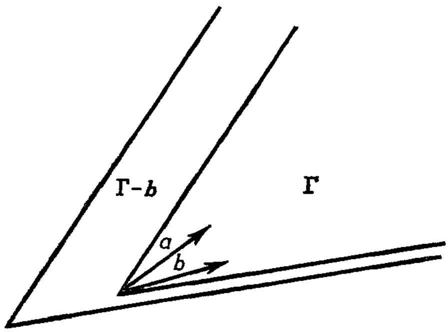

Рис. IX.2. Конус $\Gamma - b$.

$Q(D)^{m+1} F_m = \delta$. Покажем, что при достаточно больших m свертка $T * F_m$ — корректно определенная непрерывная функция с носителем в $\bar{\Gamma}$ и что $Q(D)^{m+1}(T * F_m) = T * Q(D)^{m+1} F_m = T * \delta = T$.

Если $b \in \Gamma$, то $\bar{\Gamma}$ содержится во внутренности множества $\bar{\Gamma} - b$, так что можно найти функцию ψ из C^∞, равную единице на $\bar{\Gamma}$ и имеющую носитель в $\bar{\Gamma} - b$ (рис. IX.2). Поскольку $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, существует такое N, что

$$|T(\varphi)| = |T(\psi\varphi)| \leqslant C_1 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \| x^\alpha D^\beta (\psi\varphi) \|_\infty \leqslant$$

$$\leqslant C_2 \sum_{\substack{|\alpha| \leqslant N \\ |\beta| \leqslant N}} \left(\sup_{x \in \bar{\Gamma} - b} |x^\alpha D^\beta \varphi(x)| \right) \equiv |||\varphi|||_b.$$

Итак, T имеет единственное продолжение, непрерывное по $|||\cdot|||_b$, на те функции f из C^N, для которых множество $(\operatorname{supp} f) \cap (\bar{\Gamma} - b)$ компактно.

Выберем $m = N+1$ и для $y \in \mathbb{R}^n$ положим $\tilde{F}_{N+1;\,y}(x) = F_{N+1}(y - x)$. Тогда функция $\tilde{F}_{N+1;\,y}$ принадлежит C^N и пересечение $(\operatorname{supp} \tilde{F}_{N+1;\,y}) \cap (\bar{\Gamma} - b)$ компактно (рис. IX.3). Более того, отображение $y \longmapsto \tilde{F}_{N+1;\,y}$ $|||\cdot|||_b$-непрерывно и полиномиально ограничено по y (см. рис. IX.2). Итак, функция $G(y) = T * F_{N+1}(y) \equiv T(\tilde{F}_{N+1;\,y})$ полиномиально ограничена и непрерывна и

$\operatorname{supp} G \subset \overline{\Gamma}$, поскольку

$$(\operatorname{supp} \tilde{F}_{N+1;\, y}) \cap \overline{\Gamma} = \varnothing, \qquad \text{если } y \notin \overline{\Gamma}.$$

Более того, если $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$(f*G)(y) = T((f*F_{N+1})_y^\sim) \tag{IX.11}$$

и

$$D^\alpha (f*G)(y) = T((D^\alpha f*F_{N+1})_y^\sim). \tag{IX.12}$$

Эти формулы аналогичны формулам из теоремы IX.4. Их также можно доказать, используя римановы суммы для интегралов

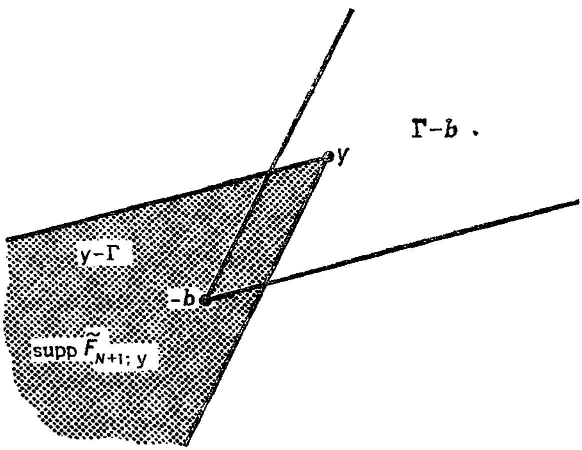

Рис. IX.3. Носитель $\tilde{F}_{N+1;\, y}$.

в правых частях и замечая, что эти суммы сходятся по $|||\cdot|||_b$. Пусть теперь $j_\varepsilon(x)$ — аппроксимативная единица; согласно предложению, доказанному в конце § IX.1, имеем

$$Q(D)^{N+2} G = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} Q(D)^{N+2} (j_\varepsilon * G) =$$

(по IX.12)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((Q(D)^{N+2} j_\varepsilon * F_{N+1})_y^\sim) =$$

(по теореме IX.4)

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((j_\varepsilon * Q(D)^{N+2} F_{N+1})_y^\sim) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} T((\tilde{j}_\varepsilon)_y) =$$

$$= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} j_\varepsilon * T = T. \ \blacksquare$$

Теорема IX.16. Пусть T — обобщенная функция умеренного роста с носителем в конусе $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, $a \in \mathbb{R}^n$, $0 < \theta < \pi/2$. Тогда $\hat{T}$ — граничное значение в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ функции $\hat{T}(\lambda - i\eta)$, аналитической в трубе $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$. Более того, $\hat{T}(\lambda - i\eta)$ удовлетворяет неравенству

$$|\hat{T}(\lambda - i\eta)| \leqslant |P(\lambda - i\eta)|(1 + [\operatorname{dist}(\eta, \partial\overline{\Gamma}^*_{a,\theta})]^{-N}) \qquad \text{(IX.13)}$$

с некоторым полиномом P и целым положительным N.

Обратно, предположим, что функция $F(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и удовлетворяет более слабым оценкам:

(i) Для каждого $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ существует полином P_{η_0} от $2n$ переменных, такой, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $\eta \in \Gamma^*_{a,\theta}$

$$|F(\lambda - i(\eta_0 + \eta))| \leqslant |P_{\eta_0}(\lambda, \eta)|.$$

(ii) Существует целое $r \geqslant 0$, такое, что для каждого $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ существует такой полином Q_{η_0}, что при всех $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и $t \in (0, 1]$

$$|F(\lambda - it\eta_0)| \leqslant \frac{|Q_{\eta_0}(\lambda)|}{t^r}.$$

Тогда существует обобщенная функция T умеренного роста с носителем в конусе $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, такая, что $\hat{T}$ — граничное значение $F(\lambda - i\eta)$ в смысле $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Более того, F можно восстановить по T с помощью формулы

$$F(\cdot - i\eta) = \widehat{e^{-\eta \cdot x} T}. \qquad \text{(IX.14)}$$

Доказательство. Пусть $T \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp} T \subset \overline{\Gamma}_{a,\theta}$. По лемме Броса — Эпштейна — Глазера существует такая полиномиально ограниченная непрерывная функция G с носителем в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, что $T = P(D)G$ для некоторого дифференциального оператора в частных производных $P(D)$. Из обсуждения, предшествующего лемме, мы уже знаем, что $\hat{T}$ — граничное значение функции

$$\hat{T}(\lambda - i\eta) = (2\pi)^{-n/2} P(i(\lambda - i\eta)) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i(\lambda - i\eta)\cdot x} G(x)\, dx.$$

Итак,

$$|\hat{T}(\lambda - i\eta)| \leqslant (2\pi)^{-n/2} |P(i(\lambda - i\eta))| \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x| d(\eta)} |G(x)|\, dx \leqslant$$

$$\leqslant C |P(i(\lambda - i\eta))| (1 + (d(\eta))^{-N}),$$

ибо $G(x)$ имеет носитель в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$ и растет на ∞ не быстрее, чем $|x|^{N-n}$ с некоторым N. Это завершает доказательство первого утверждения.

Обратно, предположим, что $F(\lambda - i\eta)$ аналитична в $\mathbb{R}^n - i\Gamma^*_{a,\theta}$ и что выполнены оценки (i) и (ii). Доказательство проводится в несколько шагов. Сначала мы покажем, что $F(\lambda - it\eta)$ имеет обобщенную функцию умеренного роста $\hat{T}_\eta$ своим граничным значением при $t \downarrow 0$. Затем убедимся, что этот предел не зависит от η. И, наконец, покажем, что носитель T лежит в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$.

Фиксируем некоторое $\eta_0 \in \Gamma^*_{a,\theta}$; тогда $F(\lambda - it\eta_0)$ при $0 < t \leqslant 1$ — распределение из $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$, которое мы обозначим $\hat{T}_{t,\eta_0}$. Пусть $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$; положим

$$h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \hat{T}_{t,\eta_0}(\psi).$$

Тогда

$$\frac{d^j}{dt^j} h(t) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_0)\left(i\eta_0 \cdot \frac{\partial}{\partial\lambda}\right)^j \psi(\lambda)\,d\lambda,$$

так что

$$\left|\frac{d^j}{dt^j} h(t)\right| \leqslant C \sup_\lambda \frac{|Q_{\eta_0}(\lambda)(1+|\lambda|)^k|\,|(i\eta_0\cdot\partial/\partial\lambda)^j\psi(\lambda)|}{t^r}, \qquad \text{(IX.15)}$$

где k выбрано достаточно большим, чтобы интеграл $\int_{\mathbb{R}^n} (1+|\lambda|)^{-k} d\lambda$ сходился.

Пусть $p = r+2$. Тогда, по основной теореме анализа,

$$h(t_1) = -\int_{t_1}^{1}\int_{t_2}^{1}\cdots\int_{t_{p-1}}^{1}\left(\frac{d^p}{dt^p} h(t_p)\right) dt_p \ldots dt_2 + h(1) + \\ + \sum_{j=1}^{p-1} Q_j(t_1)\left(\frac{d^j}{dt_1^j} h\right)(1),$$

где Q_j — подходящие полиномы. Неравенства (IX.15) показывают, что существует предел $h(t_1)$ при $t_1 \downarrow 0$ и что каждое слагаемое в пределе не превосходит константы, умноженной на полунорму ψ в $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Итак, $F(\lambda - it\eta_0)$ сходится в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ при $t \downarrow 0$ к обобщенной функции умеренного роста, которую мы обозначим $\hat{T}_{0,\eta_0}$. Предположим теперь, что $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma^*_{a,\theta}$ и что $\check{\psi}(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\hat{T}_{t,\eta_1}(\psi) = \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_2 + it(\eta_2 - \eta_1))\,\psi(\lambda)\,d\lambda =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - it\eta_2)\,\psi(\lambda - it(\eta_2 - \eta_1))\,d\lambda =$$

$$= \hat{T}_{t,\eta_2}\left(\widehat{e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\,\check{\psi}(x)}\right),$$

где для перехода ко второй строчке мы воспользовались тем, что $\psi(\lambda)$ — целая функция и для нее справедливы оценки теоремы Пэли — Винера, что позволило сдвинуть гиперплоскость интегрирования. Так как $\check{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то $\widehat{e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\check{\psi}(x)} \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} \psi$ при $t \downarrow 0$. Таким образом, по теореме V.8

$$\hat{T}_{t,\eta_2}(e^{-t(\eta_2-\eta_1)\cdot x}\check{\psi}(x)) \to \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$$

и, следовательно, $\hat{T}_{0,\eta_1}(\psi) = \hat{T}_{0,\eta_2}(\psi)$. Поскольку такие ψ плотны в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, то $\hat{T}_{0,\eta_1} = \hat{T}_{0,\eta_2}$. Итак, предел $\hat{T}_{t,\eta_0}$ при $t \downarrow 0$ не зависит от η_0. Обозначим этот предел через $\hat{T}$.

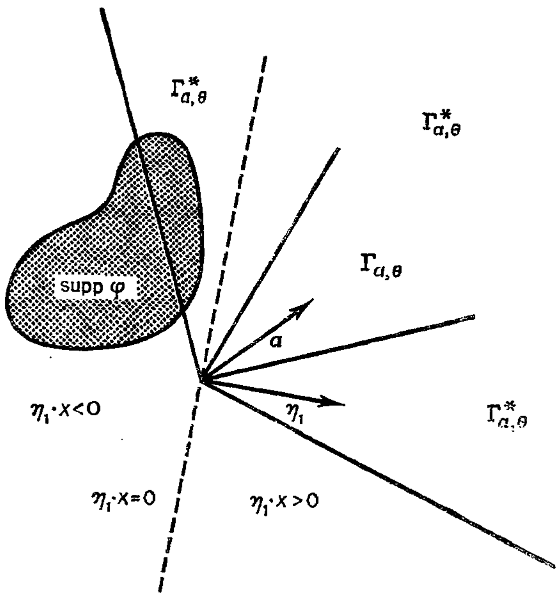

Рис. IX.4. Носитель φ.

Выше показано, что $F(\lambda - i\eta)$ имеет в качестве граничного значения обобщенную функцию $\hat{T}$ умеренного роста. Остается доказать, что носитель ее обратного преобразования Фурье T лежит в $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$, и проверить (IX.14). Пусть задано $\eta_1 \in \Gamma^*_{a,\theta}$; предположим, что $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ имеет компактный носитель в открытом полупространстве $\{x \mid \eta_1 \cdot x < 0\}$. Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что если $x \in \operatorname{supp}\varphi$, то $\eta_1 \cdot x \leqslant -\varepsilon$ (рис. IX.4). Отсюда следует, что функция $\check{\varphi}$ целая и что для каждого N

$$|\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)| = \left|(2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda - is\eta_1)\cdot x}\varphi(x)\,dx\right| \leqslant \leqslant \frac{C_N e^{-s\varepsilon}}{(1+|\lambda - is\eta_1|^N)} \tag{IX.16}$$

с некоторой константой C_N. Далее,

$$T_{t,\eta_1}(\varphi) = \hat{T}_{t,\eta_1}(\check{\varphi}) = \int F(\lambda - it\eta_1)\check{\varphi}(\lambda)\,d\lambda = = \int F(\lambda - i(t+s)\eta_1)\,\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)\,d\lambda$$

по формуле Коши. Итак, применяя предположение (i) и выбирая N в оценке (IX.16) достаточно большим, находим, что при любом $s > 0$

$$|T_{t,\eta_1}(\varphi)| \leqslant Ce^{-s\varepsilon}$$

и, значит, $T_{t,\eta_1}(\varphi) = 0$. Следовательно, носитель T_{t,η_1} содержится в полупространстве $\{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$ при каждом $t > 0$. Так как $T_{t,\eta_1} \to T$ при $t \downarrow 0$, находим, что $\operatorname{supp} T \subset \{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$. Поскольку $\bar{\Gamma}_{a,\theta}$ — пересечение замкнутых подпространств $\{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$, где η_1 пробегает весь конус $\Gamma^*_{a,\theta}$, мы получаем, что $\operatorname{supp} T \subset \bar{\Gamma}_{a,\theta}$.

Наконец, допустим, что, как и выше, $\check{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - i\eta)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int F(\tau - is\eta)\,\psi(\tau - (s-1)\,i\eta)\,d\tau =$$

$$= \hat{T}_{s,\eta}\widehat{(e^{-(s-1)\eta\cdot x}\check{\psi})} \longrightarrow$$

$$\underset{s\to 0}{\longrightarrow} \hat{T}\,\widehat{(e^{\eta\cdot x}\check{\psi})} =$$

$$= T\,(e^{-\eta\cdot x}\hat{\psi}) =$$

$$= (e^{-\eta\cdot x}T)\,(\hat{\psi}) =$$

$$= \widehat{(e^{-\eta\cdot x}T)}\,(\psi).$$

Это доказывает (IX.14) и завершает доказательство теоремы. ∎

Мы применим эту теорему при обсуждении аксиоматической квантовой теории поля в § 9.

IX.4. Оценки в L^p

Имеется большое число оценок для преобразований Фурье и сверток в пространствах L^p. Роль этих оценок состоит в том, что они определяют те условия на p и q, при которых преобразо-