что функция $\check{\varphi}$ целая и что для каждого N

$$|\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)| = \left|(2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(\lambda - is\eta_1)\cdot x} \varphi(x)\,dx\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{C_N e^{-s\varepsilon}}{(1 + |\lambda - is\eta_1|^N)} \tag{IX.16}$$

с некоторой константой C_N. Далее,

$$T_{t,\eta_1}(\varphi) = \hat{T}_{t,\eta_1}(\check{\varphi}) = \int F(\lambda - it\eta_1)\check{\varphi}(\lambda)\,d\lambda =$$
$$= \int F(\lambda - i(t+s)\eta_1)\,\check{\varphi}(\lambda - is\eta_1)\,d\lambda$$

по формуле Коши. Итак, применяя предположение (i) и выбирая N в оценке (IX.16) достаточно большим, находим, что при любом $s > 0$

$$|T_{t,\eta_1}(\varphi)| \leqslant Ce^{-s\varepsilon}$$

и, значит, $T_{t,\eta_1}(\varphi) = 0$. Следовательно, носитель T_{t,η_1} содержится в полупространстве $\{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$ при каждом $t > 0$. Так как $T_{t,\eta_1} \to T$ при $t \downarrow 0$, находим, что $\operatorname{supp} T \subset \{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$. Поскольку $\overline{\Gamma}_{a,\theta}$ — пересечение замкнутых подпространств $\{x \mid \eta_1 \cdot x \geqslant 0\}$, где η_1 пробегает весь конус $\Gamma^*_{a,\theta}$, мы получаем, что $\operatorname{supp} T \subset \overline{\Gamma}_{a,\theta}$.

Наконец, допустим, что, как и выше, $\check{\psi} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(\lambda - i\eta)\,\psi(\lambda)\,d\lambda = \int F(\tau - is\eta)\,\psi(\tau - (s-1)\,i\eta)\,d\tau =$$
$$= \hat{T}_{s,\eta}\widehat{(e^{-(s-1)\eta\cdot x}\check{\psi})} \to$$
$$\underset{s\to 0}{\to} \hat{T}\widehat{(e^{\eta\cdot x}\check{\psi})} =$$
$$= T(e^{-\eta\cdot x}\hat{\psi}) =$$
$$= (e^{-\eta\cdot x}T)(\hat{\psi}) =$$
$$= \widehat{(e^{-\eta\cdot x}T)}(\psi).$$

Это доказывает (IX.14) и завершает доказательство теоремы. ∎

Мы применим эту теорему при обсуждении аксиоматической квантовой теории поля в § 9.

IX.4. Оценки в L^p

Имеется большое число оценок для преобразований Фурье и сверток в пространствах L^p. Роль этих оценок состоит в том, что они определяют те условия на p и q, при которых преобразование Фурье или свертка с заданной функцией есть ограниченное отображение из L^p в L^q. Вывод таких оценок часто требует довольно тонкого применения L^p-интерполяционных теорем. В этом разделе мы сформулируем несколько подобных теорем и приведем примеры, показывающие, как они применяются к выводу оценок. В дополнении мы докажем первую из этих теорем (теорему IX.17) и, опираясь на идею ее доказательства, получим еще ряд интерполяционных теорем, которые пока не будем применять.

Простейшая L^p-интерполяционная теорема такова:

Теорема IX.17 (теорема Рисса—Торина). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами. Пусть $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$, и предположим, что T — линейное преобразование из $L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu)$ в $L^{q_0}(N, d\nu) \cap L^{q_1}(N, d\nu)$, удовлетворяющее условиям $\|Tf\|_{q_0} \leqslant M_0\|f\|_{p_0}$ и $\|Tf\|_{q_1} \leqslant M_1\|f\|_{p_1}$. Тогда для каждого $f \in L^{p_0} \cap L^{p_1}$ и каждого $t \in (0, 1)$ имеем $Tf \in L^{q_t}$ и $\|Tf\|_{q_t} \leqslant C_t\|f\|_{p_t}$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$, $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)q_0^{-1}$ и $C_t = M_0^{1-t}M_1^t$.

Отметим, что если предположения этой теоремы выполнены, то по теореме об ограниченном линейном отображении T можно продолжить до ограниченного отображения из $L^{p_t}(M, d\mu)$ в $L^{q_t}(N, d\nu)$. Таким образом, теорема Рисса—Торина, по существу, утверждает следующее: множество пар $\langle p^{-1}, q^{-1}\rangle$, для которых оператор T: $L^p(M, d\mu) \to L^q(N, d\nu)$ ограничен, образует выпуклое подмножество плоскости, и логарифм нормы T — выпуклая функция на этом подмножестве. Теорема Рисса—Торина представляет собой частный случай интерполяционной теоремы Стейна, доказываемой в дополнении к этому разделу.

Одно из возможных приложений этой теоремы уже было продемонстрировано в § 2 (теорема Хаусдорфа—Юнга). Вот еще одно:

Пример 1 (теорема и неравенство Юнга). Для f и g из $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ свертка определяется формулой

$$(f * g)(x) = \int f(x-y)\, g(y)\, dy. \tag{IX.17}$$

Пусть $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Если $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L^q(\mathbb{R}^n)$, то в силу неравенства Гёльдера интеграл сходится абсолютно для всех x. Следовательно, (IX.17) дает определение $f * g$ при $f \in L^p$ и $g \in L^q$. Заметим, что $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_p\|g\|_q$. Предположим теперь, что $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\int\int |f(x-y)\, g(y)|\, dx\, dy = \|f\|_1\|g\|_1,$$

так что по теореме Фубини интеграл в (IX.17) существует при почти всех x и функция $f*g$ (определенная п.в.) удовлетворяет неравенству $\|f*g\|_1 \leqslant \|f\|_1\|g\|_1$. Теперь можно применить теорему Рисса—Торина для определения свертки на других пространствах L^p.

Пусть $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T_f(g)=f*g$ — ограниченный оператор из $L^1(\mathbb{R}^n)$ в $L^1(\mathbb{R}^n)$ (с нормой, не превосходящей $\|f\|_1$) и из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (с нормой, не превосходящей $\|f\|_1$). Следовательно, по теореме Рисса—Торина T_f: $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n)$ и норма T_f не превосходит $\|f\|_1$. Фиксируем теперь $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$T_g\colon L^1(\mathbb{R}^n)\to L^p(\mathbb{R}^n),\qquad \|T_g\|\leqslant\|g\|_p;$$
$$T_g\colon L^q(\mathbb{R}^n)\to L^\infty(\mathbb{R}^n),\qquad \|T_g\|\leqslant\|g\|_p.$$

Снова применяя теорему Рисса—Торина для интерполяции между 1 и q, находим, что оператор T_g действует из $L^r(\mathbb{R}^n)$ в $L^s(\mathbb{R}^n)$, где $r^{-1}=1-tp^{-1}$ и $s^{-1}=(1-t)p^{-1}$, и норма T_g не превосходит $\|g\|_p$. Исключая t, для $1\leqslant p,\ r,\ s\leqslant\infty$ при условии $p^{-1}+r^{-1}=1+s^{-1}$ находим

$$\|f*g\|_s\leqslant\|f\|_r\|g\|_p.$$

Это неравенство называется неравенством Юнга.

Иногда важно знать, что продолжение свертки до отображения из $L^p\times L^r$ в L^s, которое мы только что определили с помощью теоремы Рисса—Торина, все еще может быть вычислено почти всюду по интегральной формуле (IX.17). Доказательство, как и само продолжение, проводится в два приема. Пусть $p^{-1}+q^{-1}=1$, и пусть $f\in L^p$, $g\in L^1$ и $h\in L^q$. Не теряя общности, можно допустить, что f, g и h положительны. Тогда

$$\int h(x)\left(\int f(x-y)\,g(y)\,dy\right)dx=\int g(y)\left(\int f(x-y)\,h(x)\,dx\right)dy\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_p\|h\|_q\int g(y)\,dy=$$
$$=\|f\|_p\|h\|_q\|g\|_1.$$

Поскольку это выполняется для всех таких h, интеграл $\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ сходится при почти всех x и лежит в L^p, причем его норма меньше или равна $\|f\|_p\|g\|_1$. Но отображение $f\longmapsto\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ совпадает со сверткой для всех $f\in L^1\cap L^\infty$, а поэтому и для всех f из L^p.

Применим теперь этот же трюк еще раз. Пусть $p^{-1}+r^{-1}=1+s^{-1}$, и предположим, что $f\in L^p$, $g\in L^r$ и $h\in L^1\cap L^{s'}$, где $s'=s(s-1)^{-1}$. Тогда, согласно неравенствам Гёльдера и Юнга,

$$\int g(y)\left(\int f(x-y)\,h(x)\,dx\right)dy\leqslant\|g\|_r\|\tilde f*h\|_{r'}\leqslant$$
$$\leqslant\|g\|_r\|\tilde f\|_p\|h\|_{s'},$$

поскольку в силу первой части наших рассуждений интеграл в скобках представляет свертку. Таким образом, по теореме Фубини $g(y)\cdot f(x-y)\,h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n)$, $g(y)\,f(x-y)\cdot h(x)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ как функция от y при почти всех x и

$$\int h(x)\left(\int f(x-y)\,g(y)\,dy\right)dx\leqslant\|g\|_r\|\tilde{f}\|_p\|h\|_{s'}.$$

В силу произвольности $h\in L^1\cap L^{s'}$, заключаем, что $f(x-y)\,g(y)\in L^1(\mathbb{R}^n)$ как функция y при почти всех x и $\int f(x-y)\,g(y)\,dy\in L^s(\mathbb{R}^n)$ с нормой, не превосходящей $\|f\|_p\|g\|_r$. Следовательно, поскольку ограниченные отображения $g\longmapsto f*g$ и $g\longmapsto\int f(x-y)\,g(y)\,dy$ совпадают на $L^1\cap L^r$, они совпадают на L^r.

Имеется классический результат Харди и Литтлвуда, гласящий, что если $p^{-1}+q^{-1}+\lambda=2$, $\lambda<1$ и p, $q>1$, то

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2}|f(x)\,g(y)|\,|x-y|^{-\lambda}\,dx\,dy<\infty, \tag{IX.18}$$

когда $f\in L^p(\mathbb{R})$, $g\in L^q(\mathbb{R})$. Это — усиление неравенства Юнга, поскольку последнее легко превратить в такое утверждение: если $p^{-1}+r^{-1}+q^{-1}=2$, то

$$\left|\iint\limits_{\mathbb{R}^2}f(x)\,g(y)\,h(x-y)\,dx\,dy\right|<\infty,$$

где $f\in L^p(\mathbb{R})$, $g\in L^r(\mathbb{R})$, $h\in L^q(\mathbb{R})$. Формула (IX.18) действительно усиливает это неравенство, так как $|x|^{-1}\notin L^1(\mathbb{R})$, а потому $|x|^{-\lambda}\notin L^{\lambda^{-1}}(\mathbb{R})$. Для того чтобы иметь возможность работать в подобных ситуациях, полезно ввести классы функций, большая часть которых не лежит ни в одном из пространств L^p.

Определение. Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой μ. Говорят, что функция f на M лежит в **слабом** L^p-пространстве, обозначается $f\in L^p_{\mathrm{w}}(M,\ d\mu)$, если существует такая постоянная $C<\infty$, что

$$\mu\{x\mid |f(x)|>t\}\leqslant Ct^{-p}\quad\text{для всех } t>0.$$

Для $f\in L^p_{\mathrm{w}}$ положим

$$\|f\|_{p,\,\mathrm{w}}=\sup_t\,(t^p\mu\{x\mid|f(x)|>t\})^{1/p}.$$

Отметим, что $\|\cdot\|_{p,\,\mathrm{w}}$ — не норма, поскольку она не удовлетворяет неравенству треугольника. Название слабое L^p-пространство объясняется тем, что $L^p\subset L^p_{\mathrm{w}}$ и $\|f\|_{p,\,\mathrm{w}}\leqslant\|f\|_p$ (см. задачу 24).

Далее, $f \in L^p$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty \mu\{x \mid |f(x)| > t\}\, t^{p-1}\, dt < \infty.$$

Если $f \in L^p_{\mathrm{w}}$, то этот интеграл может расходиться, но не сильнее, чем логарифмически.

Пример 2. Для функции $|x|^{-n/p}$ из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}$ имеем: $\mu\{x \mid |f(x)| > t\} = c_n t^{-p}$, где c_n — объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, f лежит в $L^p_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n, dx)$, но не лежит в $L^q(\mathbb{R}^n, dx)$ ни при каком q.

Мы приведем без доказательства две интерполяционные теоремы о слабых L^p-пространствах. Доказательство одной из них (теоремы Ханта) вынесено в задачи, а литературные указания даны в Замечаниях.

Теорема IX.18 (интерполяционная теорема Марцинкевича). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1 \leqslant p_0 \leqslant q_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant p_1 \leqslant q_1 \leqslant \infty$, $q_0 \neq q_1$. Предположим, что T — линейное отображение, такое, что T: $L^{p_0}(M, d\mu) \to L^{q_0}_{\mathrm{w}}(N, d\nu)$ и T: $L^{p_1}(M, d\mu) \to L^{q_1}_{\mathrm{w}}(N, d\nu)$, причем

$$\|T\varphi\|_{q_0, \mathrm{w}} \leqslant c_0 \|\varphi\|_{p_0},$$

$$\|T\psi\|_{q_1, \mathrm{w}} \leqslant c_1 \|\psi\|_{p_1}$$

для всех $\varphi \in L^{p_0}(M, d\mu)$, $\psi \in L^{q_1}(M, d\mu)$. Тогда при любом $t \in (0, 1)$ отображение T продолжается до ограниченного линейного отображения из $L^{p_t}(M, d\mu)$ в $L^{q_t}(N, d\nu)$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)\, p_0^{-1}$ и $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)\, q_0^{-}$. Его норма зависит только от t, c_i, q_i и p_i.

Теорема IX.19 (интерполяционная теорема Ханта). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1 \leqslant p_1 < p_0 \leqslant \infty$, $1 \leqslant q_1 < q_0 \leqslant \infty$. Предположим, что T — ограниченное линейное отображение из $L^{p_0}(M, d\mu)$ в $L^{q_0}(N, d\nu)$ и из $L^{p_1}(M, d\mu)$ в $L^{q_1}(N, d\nu)$. Тогда при любых $t \in (0, 1)$ оно продолжается до ограниченного линейного отображения из $L^{p_t}_{\mathrm{w}}(M, d\mu)$ в $L^{q_t}_{\mathrm{w}}(N, d\nu)$ (p_t и q_t определены выше). Более того, $\|Tf\|_{q_t, \mathrm{w}} \leqslant C_t \|f\|_{p_t, \mathrm{w}}$, где C_t зависит лишь от t, p_i, q_i и норм, отвечающих концам интервала изменения t.

Заметим, что теорема Марцинкевича — наиболее глубокая интерполяционная теорема, поскольку она превращает «слабую» информацию в сильную. Предостережем читателя, что необходимо помнить об условии $p < q$ (см. в задаче 77 пример трудностей, к которым приводит потеря этого условия). Отметим, что ни одна из «слабых» теорем, в отличие от теоремы Рисса — Торина, не дает логарифмически выпуклых оценок на норму.

В качестве примера того, как работают «в паре» две последние теоремы, выведем одно обобщение неравенства Харди — Литтлвуда.

Пример 3 (неравенство Соболева). Пусть $0<\lambda<n$, и пусть $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $h\in L^r(\mathbb{R}^n)$, где $p^{-1}+r^{-1}+\lambda n^{-1}=2$ и $1<p, r<\infty$. Тогда

$$\iint \frac{|f(x)|\,|h(y)|}{|x-y|^{\lambda}}\,d^nx\,d^ny \leqslant C_{p,r,\lambda,n}\|f\|_p\|h\|_r. \qquad \text{(IX.19)}$$

Для доказательства этой оценки необходимо следующее обобщение неравенства Юнга: если $1<p, r, s<\infty$, $p^{-1}+r^{-1}=s^{-1}+1$, $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$, $g\in L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$, то $f*g\in L^s(\mathbb{R}^n)$ и $\|f*g\|_s\leqslant C\|f\|_p\cdot\|g\|_{r,\mathrm{w}}$. Фиксируем сначала $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Тогда неравенство Юнга (пример 1) показывает, что T_f: $L^r(\mathbb{R}^n)\to L^s(\mathbb{R}^n)$, где $T_f(g)=f*g$ и $1\leqslant r\leqslant p'$. Выбирая сначала $r=1$, а затем $r=p'$ и применяя теорему Ханта, находим, что при $1<r<p'$ отображение T_f: $L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)\to L^s_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ ограничено. Теперь фиксируем $g\in L^r_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$. Известно, что отображение T_g: $L^p(\mathbb{R}^n)\to L^s_{\mathrm{w}}(\mathbb{R}^n)$ ограничено для подходящим образом связанных p и s и $p\leqslant s$. Применяя теорему Марцинкевича, заключаем, что $f*g\in L^s(\mathbb{R}^n)$. Неравенство Соболева следует непосредственно из этого обобщения неравенства Юнга.

Некоторые из наиболее важных L^p-неравенств на $\mathbb{R}^n$ приведены в табл. IX.1. Имеются также L^p-оценки, содержащие производные; некоторые из них мы рассматриваем в Замечаниях к § IX.6.

Таблица IX.1

Название неравенства	Условия	Неравенство
Гёльдера	$1\leqslant p, q, r\leqslant\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=r^{-1}$	$\|fg\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$
Хаусдорфа — Юнга	$1\leqslant p\leqslant 2$ $p^{-1}+q^{-1}=1$	$\|\hat f\|_q\leqslant(2\pi)^{(n/2-n/p)}\|f\|_p$
Юнга	$1\leqslant p, q, r\leqslant\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_r\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$
Обобщенное Юнга	$1<p, q, r<\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_r\leqslant C_{p,q}\|f\|_p\|g\|_{q,\mathrm{w}}$
Слабое Хаусдорфа — Юнга	$1<p<2$ $p^{-1}+q^{-1}=1$	$\|\hat f\|_{q,\mathrm{w}}\leqslant C_{p,n}\|f\|_{p,\mathrm{w}}$
Слабое Юнга	$1<r, p, s<\infty$ $p^{-1}+q^{-1}=1+r^{-1}$	$\|f*g\|_{r,\mathrm{w}}\leqslant C_{p,q}\|f\|_{p,\mathrm{w}}\|g\|_{q,\mathrm{w}}$