Дополнение к § IX.4. Абстрактная интерполяция

В этом дополнении мы докажем абстрактную интерполяционную теорему, а затем дадим некоторые ее приложения и, в частности, докажем теоремы Стейна и Рисса—Торина. Прежде чем обращаться к абстрактной теории, мы приведем два предложения, иллюстрирующих главную идею, лежащую в основе интерполяции.

Предложение 1. Пусть A и B—матрицы на пространстве $\mathbb{C}^n$ с естественным внутренним произведением, причем $A \geqslant 0$. Предположим, что $\|AB\| \leqslant 1$ и $\|BA\| \leqslant 1$. Тогда $\|A^{1/2}BA^{1/2}\| \leqslant 1$.

Доказательство. Предположим, что это предложение справедливо для всех $A > 0$. Тогда можно доказать, что оно справедливо для всех $A \geqslant 0$. В самом деле, пусть задано $A \geqslant 0$ и выполняются условия $\|AB\| \leqslant 1$, $\|BA\| \leqslant 1$; фиксируем $c > 0$ и положим $B' = B(1+c\|B\|)^{-1}$. Тогда $\|(A+c)B'\| \leqslant 1$ и $\|B'(A+c)\| \leqslant 1$. Так как $A+c > 0$, то находим, что $\|(A+c)^{1/2}B'(A+c)^{1/2}\| \leqslant 1$. Устремляя $c \downarrow 0$, получаем

$$\|A^{1/2}BA^{1/2}\| \leqslant 1.$$

Итак, можно считать, что $A > 0$.

Как из оценок для AB и BA получить оценки для $A^{1/2}BA^{1/2}$? Поскольку A^x может быть определен как самосопряженный оператор, естественно ввести функцию $F(x) = A^xBA^{1-x}$. Заметим, что $F(x)$ имеет аналитическое продолжение $F(z) = A^zBA^{1-z} = e^{z \log A}Be^{(1-z)\log A}$ на всю комплексную плоскость. Таким образом, условия предложения 1 говорят нам, что данная матричнозначная аналитическая функция $F(z)$ удовлетворяет неравенствам $\|F(0)\| \leqslant 1$ и $\|F(1)\| \leqslant 1$. Из этих неравенств мы должны вывести, что $\|F(1/2)\| \leqslant 1$. Это достигается при помощи одного классического результата из теории функций, принадлежащего Адамару.

Лемма (теорема Адамара о трех прямых). Пусть $\varphi(z)$—комплекснозначная функция, ограниченная и непрерывная в замкнутой полосе $\{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, аналитическая во внутренности этой полосы и удовлетворяющая неравенствам

$$|\varphi(z)| \leqslant M_0, \qquad \text{если } \operatorname{Re} z = 0,$$

и

$$|\varphi(z)| \leqslant M_1, \qquad \text{если } \operatorname{Re} z = 1.$$

Тогда $|\varphi(z)| \leqslant M_0^{1-\operatorname{Re} z} M_1^{\operatorname{Re} z}$ для всех z из данной полосы.

Доказательство. Можно взять $M_0 = 1 = M_1$, так как всегда можно заменить $\varphi(z)$ на $\varphi(z) M_0^{z-1} M_1^{-z}$. Нужно показать, что $|\varphi(z)| \leqslant 1$ в данной полосе. Если $\varphi(z) \to 0$ на ∞ в полосе, то $|\varphi(z)| \leqslant 1$

по принципу максимума. Если же φ не убывает на ∞, рассмотрим $\varphi_n(z)=\varphi(z)e^{z^2/n}e^{-1/n}$. Поскольку $\varphi(z)$ ограничена, $\varphi_n(z)\to 0$ при $z\to\infty$ в полосе. Следовательно, $|\varphi_n(z)|\leqslant 1$ во всей полосе, ибо $|\varphi_n|\leqslant 1$ на границе. Это справедливо для всех n, и потому $|\varphi(z)|\leqslant 1$, так как $e^{z^2/n}e^{-1/n}\to 1$ при $n\to\infty$. ∎

Точно так же доказывается теорема Адамара для аналитических функций со значениями в банаховых пространствах. Мы будем пользоваться этим обобщением без пояснений. Теперь легко доказать предложение 1.

Завершение доказательства предложения 1. Если $y\in\mathbb{R}$, то $e^{iy\log A}$ унитарен, т. е. $\|e^{iy\log A}\|=1$. Таким образом, $\|F(z)\|=\|BA\|\leqslant 1$ на прямой $\operatorname{Re} z=0$ и $\|F(z)\|=\|AB\|\leqslant 1$ на прямой $\operatorname{Re} z=1$. Более того, если $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$, то $\|F(z)\|\leqslant(1+\|A\|)^2\|B\|$. Итак, по теореме о трех прямых $\|F(z)\|\leqslant 1$ для всех z из полосы $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$. В частности, $\|F(1/2)\|\leqslant 1$. ∎

Мы предлагаем читателю найти доказательство предложения 1, не опирающееся на интерполяцию (задача 51). Из теоремы о трех прямых вытекает простое доказательство неравенства Гёльдера.

Предложение 2 (неравенство Гёльдера). Пусть $\langle M,\mu\rangle$ — пространство с мерой, и предположим, что $f\in L^p(M,d\mu)$ и $g\in L^q(M,d\mu)$, где $p^{-1}+q^{-1}=1$. Тогда $fg\in L^1(M,d\mu)$ и $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

Доказательство. Достаточно доказать неравенство Гёльдера в случае, когда f и g — неотрицательные простые функции (т. е. конечные линейные комбинации характеристических функций непересекающихся измеримых множеств конечной меры). Пусть

$$F(z)=\int\limits_M f^{pz}g^{q(1-z)}\,d\mu.$$

Тогда $F(z)$ непрерывна и ограничена в полосе $0\leqslant\operatorname{Re} z\leqslant 1$ и аналитична внутри полосы. Если $\operatorname{Re} z=0$, то

$$|F(z)|\leqslant\int|f^{pz}g^{q(1-z)}|\,d\mu=\int|g|^q\,d\mu=\|g\|_q^q,$$

а если $\operatorname{Re} z=1$, то

$$|F(z)|\leqslant\int|f^{pz}g^{q(1-z)}|\,d\mu=\int|f|^p\,d\mu=\|f\|_p^p.$$

Итак, по теореме о трех прямых $|F(x)|\leqslant\|g\|_q^{q(1-x)}\cdot\|f\|_p^{px}$ для всех $0\leqslant x\leqslant 1$. В частности, для $x=p^{-1}$ находим, что

$$F\left(\frac{1}{p}\right)=\int\limits_M fg\,d\mu\leqslant\|g\|_q\|f\|_p. \ ∎$$

Теорема Адамара лежит в основе общего подхода к интерполяционным теоремам с использованием методов комплексного анализа (литературные указания на другие подходы приведены в Замечаниях). Наше рассмотрение делится на две части. В первой мы показываем, что если X — векторное пространство с двумя нормами $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$, удовлетворяющими некоторому условию согласованности, то можно ввести естественное семейство банаховых пространств $\{X_t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, задающих интерполяцию пространств X_0 и X_1 — пополнений X по нормам $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$. Отсюда легко получаем абстрактную интерполяционную теорему, а именно, если $\{X_t\}$ — интерполяция X_0 и X_1, а $\{Y_t\}$ — интерполяция Y_0 и Y_1, то любое отображение T, лежащее в $\mathscr{L}(X_0, Y_0)$ и в $\mathscr{L}(X_1, Y_1)$, однозначно продолжается до ограниченного отображения X_t в Y_t при каждом t. Во второй части мы покажем, как применяется эта абстрактная теорема в конкретных случаях. В частности, мы докажем теорему Стейна, из которой прямо следует теорема Рисса — Торина, а также несколько других интерполяционных теорем. Трудность, с которой приходится сталкиваться в частных случаях, состоит в конкретной идентификации пространств $\{X_t\}$ и $\{Y_t\}$.

Определение. Пусть X — комплексное векторное пространство. Две нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ на X называются **согласованными**, если любая последовательность $\{x_n\}$, сходящаяся к нулю по одной норме и являющаяся последовательностью Коши по другой норме, сходится к нулю по обеим нормам. Если $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы, положим

$$\|x\|_+ = \inf\{\|y\|^{(0)} + \|z\|^{(1)} \mid x = y + z\}.$$

Предложение 3. Пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ — согласованные нормы на комплексном векторном пространстве X. Тогда

(a) $\|\cdot\|_+$ — норма.

(b) Если X_0, X_1 и X_+ обозначают пополнения X по нормам $\|\cdot\|^{(0)}$, $\|\cdot\|^{(1)}$ и $\|\cdot\|_+$, то тождественное отображение X продолжается до непрерывного *инъективного* отображения X_0 в X_+ и X_1 в X_+.

Доказательство. Предположим, что $x \in X$ и $\|x\|_+ = 0$. Тогда существуют такие y_n и z_n, что $x = y_n + z_n$ и $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$, $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} 0$. Но тогда $y_n = x - z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} x$, так что $x = 0$ в силу согласованности норм. Это доказывает (a).

Поскольку $\|\cdot\|_+ \leqslant \|\cdot\|^{(0)}$, тождественное отображение ι однозначно продолжается до непрерывного отображения X_0 в X_+. Предположим, что $x \in X_0$ и $\iota(x) = 0$. Тогда существуют такие

$x_n \in X$, что $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} x$ и $x_n \xrightarrow{\|\cdot\|_+} 0$. Из второго утверждения следует, что существуют y_n, $z_n \in X$, для которых $x_n = y_n + z_n$, $y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$ и $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(1)}} 0$. Таким образом, $z_n = x_n - y_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} x$. Поскольку нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы, $z_n \xrightarrow{\|\cdot\|^{(0)}} 0$, так что отображение ι: $X_0 \to X_+$ инъективно. То же доказательство проходит и для X_1. ∎

Справедливо и обратное утверждение: если $\|\cdot\|_+$ — норма, а продолжения отображения ι инъективны, то нормы $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ согласованы. Чтобы освоиться с согласованными и несогласованными нормами, читатель может проделать задачу 34.

Пусть S — замкнутая полоса $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$, а S° — внутренность S, и пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$ — две согласованные нормы на комплексном векторном пространстве X. Определим $\mathcal{F}(X)$ как множество непрерывных функций f из S в X_+, аналитических в S° и удовлетворяющих условиям:

(i) если $\operatorname{Re} z = 0$, то $f(z) \in X_0$, а если $\operatorname{Re} z = 1$, то $f(z) \in X_1$;

(ii) $\sup\limits_{z \in S} \|f(z)\|_+ < \infty$;

(iii) $|||f||| = \sup\limits_{t \in \mathbb{R}} \{\|f(it)\|^{(0)}, \|f(1+it)\|^{(1)}\} < \infty$.

Предложение 4.

(a) $\mathcal{F}(X)$ с нормой $|||\cdot|||$ есть банахово пространство.

(b) Для каждого $t \in [0, 1]$ подпространство

$$K_t = \{f \in \mathcal{F}(X) \mid f(t) = 0\}$$

замкнуто по норме $|||\cdot|||$.

Доказательство. Функционал $|||\cdot|||$, очевидно, положителен, полуаддитивен и положительно однороден. В силу теоремы о трех прямых и неравенств $\|\cdot\|_+ \leqslant \|\cdot\|^{(i)}$, $i = 0, 1$, видим, что

$$\sup_{z \in S} \|f(z)\|_+ \leqslant \sup_{\operatorname{Re} z = 0, 1} \|f(z)\|_+ \leqslant |||f||| . \qquad \text{(IX.20)}$$

Итак, если $|||f||| = 0$, то $f \equiv 0$, т. е. $|||\cdot|||$ — норма на $\mathcal{F}(X)$. Чтобы убедиться в полноте $\mathcal{F}(X)$, предположим, что $\{f_n\}$ — последовательность Коши в $\mathcal{F}(X)$. Согласно (IX.20), эти функции равномерно сходятся к ограниченной непрерывной функции f на S. В силу равномерной сходимости, f аналитична на S° и удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii). Это доказательство полноты показывает также, что каждое из подпространств K_t замкнуто. ∎

Положим теперь

$$\tilde{X}_t = \mathcal{F}(X)/K_t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Обозначим факторнорму в пространстве $\tilde{X}_t$ через $\|\cdot\|^{(t)}$. Заметим, что X можно отождествить с подмножеством $\tilde{X}_t$ посредством отображения, переводящего каждый элемент $x \in X$ в $[x]$ — класс эквивалентности постоянной функции, значение которой равно x. Далее, $\tilde{X}_t$ можно отождествить с некоторым подмножеством X_+ посредством отображения, переводящего класс эквивалентности $[f]$ в общее значение его элементов в точке t. Это отображение, очевидно, инъективно, а следующее вычисление доказывает его непрерывность. Пусть $[f] \in \tilde{X}_t$ и $x = f(t)$. Согласно (IX.20), $\|x\|_+ \leqslant |||f|||$. Таким образом,

$$\|x\|_+ \leqslant \inf \{|||f||| \mid f \in \mathcal{F}(X),\ f(t) = x\} = \|[f]\|^{(t)}$$

Теперь определим X_t как пополнение X по норме $\|\cdot\|^{(t)}$. Итак, введенные нами пространства связаны следующим образом:

$$X \longrightarrow X_t \longrightarrow \tilde{X}_t \longrightarrow X_+,$$

где каждая стрелка — непрерывное инъективное отображение. При $t=0$ (соответственно $t=1$) X_t есть как раз пространство X_0 (соответственно X_1), с которого мы начинали. Чтобы убедиться в этом, выберем $x \in X$, и пусть $\|\cdot\|^{(0)}$ обозначает исходную норму в X_0. Если $f \in \mathcal{F}(X)$ и $f(0) = x$, то

$$\|x\|^{(0)} \leqslant \sup_{y \in \mathbb{R}} \{\|f(iy)\|^{(0)},\ \|f(1+iy)\|^{(1)}\} = |||f|||,$$

так что

$$\|x\|^{(0)} \leqslant \inf \{|||f||| \mid f(0) = x\}.$$

Обратно, пусть $c > 0$, и рассмотрим $f_c(z) = e^{-cz}x$. Тогда $\|f_c(iy)\|^{(0)} = \|x\|^{(0)}$ и величину $\sup\limits_{y \in \mathbb{R}} \|f_c(1+iy)\|^{(1)}$ можно сделать сколь угодно малой, выбирая c большим. Итак,

$$\|x\|^{(0)} = \inf \{|||f||| \mid f(0) = x\},$$

т. е. факторнорма есть в точности введенная выше норма $\|\cdot\|^{(0)}$. Доказательство для $t=1$ аналогично. Пространства X_t называются **интерполирующими пространствами** для X_0 и X_1, а нормы $\|\cdot\|^{(t)}$ — **интерполирующими нормами** для $\|\cdot\|^{(0)}$ и $\|\cdot\|^{(1)}$.

Заметим, что можно (хотя и не просто, см. задачу 37) доказать, что $X_t = \tilde{X}_t$, но нам это не потребуется. Единственное, что нам необходимо знать, — это что норма на X_t по определению равна факторнорме на $\mathcal{F}(X)/K_t$. Позднее, в примерах, когда нам придется отождествлять X_t с заданным банаховым пространством B_t, мы всегда будем делать это, показывая, что как X_t, так и B_t — пополнения X по одной и той же норме.

Теорема IX.20 (интерполяционная теорема Кальдерона — Лионса). Пусть X и Y — комплексные векторные пространства с заданными согласованными нормами $\|\cdot\|_X^{(0)}$ и $\|\cdot\|_X^{(1)}$ на X и $\|\cdot\|_Y^{(0)}$ и $\|\cdot\|_Y^{(1)}$ на Y. Предположим, что $T(\cdot)$ — аналитическая равномерно ограниченная непрерывная $\mathscr{L}(X_+, Y_+)$-значная функция на полосе S со следующими свойствами:

(i) $T(t)$: $X \longrightarrow Y$ при каждом $t \in (0, 1)$.

(ii) Для каждого $y \in \mathbb{R}$ имеем $T(iy) \in \mathscr{L}(X_0, Y_0)$ и

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(iy)\|_{\mathscr{L}(X_0, Y_0)} < \infty.$$

(iii) Для всех $y \in \mathbb{R}$ имеем $T(1+iy) \in \mathscr{L}(X_1, Y_1)$ и

$$M_1 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(1+iy)\|_{\mathscr{L}(X_1, Y_1)} < \infty.$$

Тогда для любого $t \in (0, 1)$

$$T(t)[X_t] \subset Y_t$$

и

$$\|T(t)\|_{\mathscr{L}(X_t, Y_t)} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t.$$

Доказательство. Положим $U(z) = M_0^{z-1} M_1^{-z} T(z)$. Тогда $U(\cdot)$ обладает теми же свойствами, что и $T(\cdot)$, за исключением того, что оценки на $U(z)$ при $\operatorname{Re} z = 0$ и $\operatorname{Re} z = 1$ равны единице. Итак, без потери общности можно считать, что $M_0 = M_1 = 1$.

Если $f \in \mathscr{F}(X)$, то $T(z) f(z)$ — непрерывная ограниченная Y_+-значная функция на S, аналитическая в S°. По предположениям (ii) и (iii)

$$\|T(iy) f(iy)\|_Y^{(0)} \leqslant \|f(iy)\|_X^{(0)},$$
$$\|T(1+iy) f(1+iy)\|_Y^{(1)} \leqslant \|f(1+iy)\|_X^{(1)}$$

для каждого $y \in \mathbb{R}$. Значит, отображение J: $\mathscr{F}(X) \longrightarrow \mathscr{F}(Y)$, заданное как $(Jf)(z) = T(z) f(z)$, имеет норму, не превосходящую единицы. Более того, если

$$K_t^X = \{f \in \mathscr{F}(X) \mid f(t) = 0\} \text{ и } K_t^Y = \{f \in \mathscr{F}(Y) \mid f(t) = 0\},$$

то $J[K_t^X] \subset K_t^Y$. Итак, J сводится к сжатию $\tilde{J}_t$: $\tilde{X}_t \longrightarrow \tilde{Y}_t$. Поскольку $\tilde{J}_t$ действует на классах эквивалентности по формуле $\tilde{J}_t[f] = [T(t) f(t)]$, мы видим, что $\tilde{J}_t$ равно $T(t) \restriction \tilde{X}_t$ при естественном отождествлении $\tilde{X}_t$ с подмножеством X_+. Наконец, поскольку $T(t)$: $X \longrightarrow Y$, то $T(t)[X_t] \subset Y_t$. ∎

Приведем теперь несколько примеров, показывающих, как применять эту абстрактную интерполяционную теорему.

Пример 1 (пространства L^p). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ — пространство с σ-конечной мерой, и предположим, что $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$. Пусть $X = L^{p_0}(M, d\mu) \cap L^{p_1}(M, d\mu)$, и пусть $\|\cdot\|^{(0)} = \|\cdot\|_{p_0}$, $\|\cdot\|^{(1)} = \|\cdot\|_{p_1}$. Покажем, что $X_t = L^{p_t}(M, d\mu)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)\,p_0^{-1}$, за исключением случая $p_1 = \infty$, когда (при $t = 1$) X_1 — замыкание X по норме $\|\cdot\|_\infty$ (которое может быть меньше, чем $L^\infty(M, d\mu)$). Доказательство состоит в демонстрации того, что нормы $\|\cdot\|^{(t)}$ и $\|\cdot\|_{p_t}$ совпадают на простых функциях, которые плотны в X. Пусть $t \in (0, 1)$, и пусть $\varphi(x)$ — простая функция, причем $\|\varphi\|_{p_t} = 1$. Положим, по определению,

$$f(z) = |\varphi(\cdot)|^{p_t\left(zp_1^{-1} + (1-z)\,p_0^{-1}\right)} \exp(i \arg \varphi(\cdot)).$$

Тогда $f(z) \in X$ для каждого $z \in S$ и

$$\|f(iy)\|^{p_0}_{L^{p_0}(M,\, d\mu)} = \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_0\left(iyp_1^{-1} + (1-iy)\,p_0^{-1}\right)} \right| d\mu(x) =$$

$$= \int_M |\varphi(x)|^{p_t} d\mu(x) = 1.$$

Если $p_1 = \infty$, то $\|f(1+iy)\|_\infty = 1$, а если $p_1 < \infty$, то

$$\|f(1+iy)\|^{p_1}_{L^{p_1}(M,\, d\mu)} = \int_M \left| |\varphi(x)|^{p_t p_1\left((1+iy)\,p_1^{-1} - iyp_0^{-1}\right)} \right| d\mu(x) =$$

$$= \int_M |\varphi(x)|^{p_t}\, d\mu(x) = 1.$$

Следовательно, $|||f||| = 1$, так что $\|f(t)\|^{(t)} = \|f\|_{\mathcal{F}(X)/K_t} \leqslant 1$. Поскольку значение f в точке t равно φ, имеем $\|\varphi\|^{(t)} \leqslant 1$. Итак, мы показали, что $\|\varphi\|^{(t)} \leqslant \|\varphi\|_{L^{p_t}}$ для всех простых функций φ.

Для доказательства обратного неравенства допустим, что $f \in \mathcal{F}(X)$ и φ — простая функция на M. Положим

$$g(z) = |\varphi(\cdot)|^{q_t\left(zq_1^{-1} + (1-z)\,q_0^{-1}\right)} \exp(i \arg \varphi(\cdot)),$$

где $q_t^{-1} = 1 - p_t^{-1}$. Тогда, поскольку $f(z)$ аналитична и ограничена как всякая X_+-значная функция, функция $H(z) = \int_M f(z)\, g(z)\, d\mu$ аналитична и ограничена в S и $H(t) = \int \varphi f(t)\, d\mu$. По теореме о трех прямых,

$$\begin{aligned}
|H(t)| &\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \{|H(iy)|,\ |H(1+iy)|\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \{\|f(iy)g(iy)\|_{L^1},\ \|f(1+iy)g(1+iy)\|_{L^1}\} \leqslant \\
&\leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}} \left\{\|f(iy)\|_{L^{p_0}}\|g(iy)\|_{L^{q_0}},\ \|f(1+iy)\|_{L^{p_1}}\|g(1+iy)\|_{L^{q_1}}\right\} \leqslant \\
&\leqslant \left(\sup \left\{\|f(iy)\|_{L^{p_0}},\ \|f(1+iy)\|_{L^{p_1}}\right\}\right) \cdot \\
&\qquad \cdot \left(\sup \left\{\|g(iy)\|_{L^{q_0}},\ \|g(1+iy)\|_{L^{q_1}}\right\}\right) = \\
&= |||f|||\cdot|||g||| = \|\varphi\|_{q_t} |||f|||
\end{aligned}$$

в силу приведенного выше вычисления. Заметим, что обозначенные здесь тройными чертами нормы различны: одна получена из L^{p_0} и L^{p_1}, а вторая — из L^{q_0} и L^{q_1}. Поскольку

$$\left|\int \varphi f(t)\, d\mu\right| \leqslant \|\varphi\|_{q_t} |||f|||,$$

находим, что $f \in L^{p_t}$ и

$$\|f(t)\|_{L^{p_t}} \leqslant |||f|||.$$

Отсюда следует, что для простых ψ и для $f \in \psi + K_t$

$$\|\psi\|^{(t)} = \inf_{f\in\psi+K_t} |||f||| \geqslant \|\psi\|_{L^{p_t}}.$$

Итак, нормы $\|\cdot\|_{p_t}$ и $\|\cdot\|^{(t)}$ совпадают на простых функциях. Поскольку $X = L^{p_0} \cap L^{p_1}$ и простые функции плотны в X_t и L^{p_t}, заключаем, что $X_t = L^{p_t}$.

Сопоставляя доказанный факт, т. е. то, что $L^{p_t} = X_t$, с абстрактной интерполяционной теоремой, получаем, что справедлива

Теорема IX.21 (интерполяционная теорема Стейна). Пусть $\langle M, \mu\rangle$ и $\langle N, \nu\rangle$ — пространства с σ-конечными мерами и $1 \leqslant p_0, p_1, q_0, q_1 \leqslant \infty$. Предположим, что $T(\cdot)$ — непрерывная функция в полосе $S = \{z \mid 0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ со значениями в

$$\mathscr{L}(L^{p_0}(M, d\mu) + L^{p_1}(M, d\mu),\ L^{q_0}(N, d\nu) + L^{q_1}(N, d\nu)),$$

которая равномерно ограничена, аналитична во внутренности полосы и удовлетворяет условиям

(i) $T(z)$: $L^{p_0} \cap L^{p_1} \to L^{q_0} \cap L^{q_1}$ для всех $z \in S$.

(ii) $T(iy) \in \mathscr{L}(L^{p_0}(M, d\mu),\ L^{q_0}(N, d\nu))$ для всех $y \in \mathbb{R}$ и

$$M_0 = \sup_{y\in\mathbb{R}} \|T(iy)\|_{\mathscr{L}(L^{p_0},\ L^{q_0})} < \infty.$$

(iii) $T(1+iy) \in \mathscr{L}(L^{p_1}(M, d\mu), L^{q_1}(N, d\nu))$ для всех $y \in \mathbb{R}$ и

$$M_1 = \sup_{y \in \mathbb{R}} \| T(1+iy) \|_{\mathscr{L}(L^{p_1}, L^{q_1})} < \infty.$$

Тогда для каждого $t \in (0, 1)$

$$T(t): L^{p_t}(M, d\mu) \to L^{q_t}(N, d\nu)$$

и

$$\| T(t) \|_{\mathscr{L}(L^{p_t}, L^{q_t})} \leqslant M_0^{1-t} M_1^t,$$

где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t) p_0^{-1}$, $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t) q_0^{-1}$.

Пользуясь тем, что $\bar{X}_t = X$, можно отказаться от условия (i) как в теореме Стейна, так и в теореме Кальдерона—Лионса. Отметим, что заключения теоремы остаются в силе и тогда, когда наложено более слабое условие аналитичности, а именно, функция $\int_N (T(z)\varphi)(y)\psi(y)\,d\nu(y)$ аналитична для всех простых функций φ и ψ. Теорема Рисса—Торина немедленно следует из интерполяционной теоремы Стейна: достаточно положить $T(z) = T$ для всех z.

Пример 2 ($\mathscr{I}_p$). Пусть $\mathscr{H}$—сепарабельное гильбертово пространство. Напомним, что класс операторов со следом $\mathscr{I}_1$—это множество таких операторов $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, что $\operatorname{tr}(|A|) < \infty$, причем $\mathscr{I}_1$ сопряжено к множеству компактных операторов $\operatorname{Com}(\mathscr{H})$ (теорема VI.26). Для $1 \leqslant p < \infty$ определим множество $\mathscr{I}_p$, полагая

$$\mathscr{I}_p = \{A \in \mathscr{L}(\mathscr{H}) \mid |A|^p \in \mathscr{I}_1\},$$

и пусть $\|A\|_p = (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p}$. Для $p = \infty$ положим $\mathscr{I}_\infty = \operatorname{Com}(\mathscr{H})$ и $\|A\|_\infty = \|A\|$. Если $|A|^p \in \mathscr{I}_1$, то по теореме Рисса—Шаудера (теорема VI.15) $\sigma(|A|^p) \setminus \{0\}$ состоит из изолированных собственных значений конечной кратности. Отсюда следует, что оператор $|A|$ компактен, а потому компактен и $A = U|A|$, так как $\operatorname{Com}(\mathscr{H})$—идеал в $\mathscr{L}(\mathscr{H})$. Согласно теореме VI.17, A можно представить в виде $A = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$, где $\{\psi_n\}$ и $\{\varphi_n\}$—ортонормированные наборы, а λ_n—сингулярные значения A (ненулевые собственные значения $|A|$). Итак,

$$|A| = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\psi_n \quad \text{и} \quad |A|^p = \sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p (\psi_n, \cdot)\psi_n,$$

поэтому

$$\|A\|_p = (\operatorname{tr}(|A|^p))^{1/p} = \left(\sum_{n=1}^{N} \lambda_n^p\right)^{1/p}.$$

Это означает, что $\mathcal{I}_p$ есть не что иное, как множество компактных операторов, сингулярные значения которых лежат в l_p, а нормы равны нормам в l_p. Это справедливо даже при $p=\infty$.

Предложение 5. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $q^{-1}+p^{-1}=1$. Если $A \in \mathcal{I}_p$ и $B \in \mathcal{I}_q$, то $AB \in \mathcal{I}_1$ и $\|AB\|_1 \leqslant \|A\|_p \|B\|_q$.

Доказательство. При $p=1$, $q=\infty$ это утверждение было рассмотрено в задаче 28 гл. VI. Для $1<p<\infty$ доказательство аналогично доказательству неравенства Гёльдера, приведенному в предложении 2. Пусть $A=U|A|$ и $B=V|B|$ — полярные разложения A и B; положим

$$F(z)=\operatorname{tr}(U|A|^{pz}V|B|^{q(1-z)}).$$

Функция $F(z)$ ограничена и непрерывна на полосе $S=\{z \mid 0 \leqslant \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant 1\}$ и аналитична во внутренности этой полосы. Поскольку оператор $|A|^{pz}$ унитарен на прямой $\operatorname{Re} z=0$, а $|B|^{q(1-z)}$ унитарен на прямой $\operatorname{Re} z=1$, имеем

$$\begin{aligned} |F(iy)| &= |\operatorname{tr}(U|A|^{iyp}V|B|^{q}|B|^{iyq})| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{tr}(|B|^{q}) = \|B\|_q^q, \\ |F(1+iy)| &= |\operatorname{tr}(U|A|^{p}|A|^{iyp}V|B|^{-iyq})| \leqslant \\ &\leqslant \operatorname{tr}(|A|^{p}) = \|A\|_p^p. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались известными свойствами следа оператора: $\operatorname{tr}(CD)=\operatorname{tr}(DC)$ и $|\operatorname{tr}(CD)| \leqslant \|D\| \operatorname{tr}(C)$ при $C \geqslant 0$. Тогда по теореме о трех прямых $|F(z)| \leqslant \|A\|_p^{pz} \|B\|_q^{q(1-z)}$ для всех $z \in (0, 1)$. В частности, при $z=p^{-1}$ находим

$$|\operatorname{tr}(AB)| = |F(1/p)| \leqslant \|A\|_p \|B\|_q. \ \blacksquare$$

Предположим, что $A=U|A| \in \mathcal{I}_p$, и определим B формулой $B=|A|^{p-1}U^*\|A\|_p^{-p/q}$. Тогда

$$\begin{aligned} \|B\|_q &= \operatorname{tr}[||A|^{p-1}U^*|^q]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q} = \\ &= \operatorname{tr}[(U|A|^{2(p-1)}U^*)^{q/2}]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q} = \\ &= \operatorname{tr}[U|A|^{q(p-1)}U^*]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q} = \\ &= \operatorname{tr}[|A|^{q(p-1)}]^{1/q}\|A\|_p^{-p/q} = 1, \end{aligned}$$

поскольку $\operatorname{Ker} U = \operatorname{Ker} A$. Аналогичное вычисление показывает, что $\operatorname{tr}(AB)=\|A\|_p$. Итак, по предложению 5,

$$\|A\|_p = \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}(AD)|.$$

Предположим теперь, что A и C принадлежат $\mathcal{I}_p$. Тогда

$$\|A+C\|_p = \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}((A+C)D)| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}(AD)| + \sup_{\|D\|_q=1} |\operatorname{tr}(CD)| =$$
$$= \|A\|_p + \|C\|_p.$$

Итак, $\mathcal{I}_p$ — векторное пространство, а $\|\cdot\|_p$ — норма в $\mathcal{I}_p$.

Предложение 6. Пусть $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Тогда

(a) $\mathcal{I}_p$ — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_p$.

(b) $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_p \subset \operatorname{Com}(\mathcal{H})$ и $\mathcal{I}_p$ — замыкание множества операторов конечного ранга по норме $\|\cdot\|_p$.

(c) Если $A \in \mathcal{I}_p$, то $A^* \in \mathcal{I}_p$ и $\|A^*\|_p = \|A\|_p$.

Доказательство. При $p=\infty$ (a), (b) и (c) — стандартные свойства компактных операторов. Предположим поэтому, что $1 \leqslant p < \infty$. Для любой последовательности $\{\lambda_n\}$

$$\|\{\lambda_n\}\|_\infty \leqslant \|\{\lambda_n\}\|_p \leqslant \|\{\lambda_n\}\|_1,$$

так что

$$\|A\| \leqslant \|A\|_p \leqslant \|A\|_1.$$

Следовательно, любая последовательность Коши $\{A_n\}$ из $\mathcal{I}_p$ сходится в равномерной топологии к некоторому предельному оператору A. Читатель легко может проверить сам, что $A \in \mathcal{I}_p$ и $\|A_n - A\|_p \to 0$. Следовательно, $\mathcal{I}_p$ полно по норме $\|\cdot\|_p$. Как показано выше, каждый оператор $A \in \mathcal{I}_p$ компактен и $\|A\|_p = \|\{\lambda_n\}\|_{l_p}$, где $\{\lambda_n\}$ — сингулярные значения A в представлении $A = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$. Итак, операторы конечного ранга $A_M = \sum_{n=1}^{M} \lambda_n (\psi_n, \cdot)\varphi_n$ сходятся к A по $\|\cdot\|_p$-норме. Включения $\mathcal{I}_1 \subset \mathcal{I}_p \subset \operatorname{Com}(\mathcal{H})$ немедленно следуют из приведенного выше неравенства. Этим доказаны (a) и (b).

Для доказательства (c) отметим, что A и A^* имеют одни и те же сингулярные значения. ∎

Предложение 7. Если $1 < p, q < \infty$ и $p^{-1} + q^{-1} = 1$, то $\mathcal{I}_p^* = \mathcal{I}_q$.

Доказательство. Предложение 5 и сделанное после него замечание показывают, что для каждого $A \in \mathcal{I}_q$ отображение $B \mapsto \operatorname{tr}(AB)$ задает ограниченный линейный функционал на $\mathcal{I}_p$ с нормой $\|A\|_q$. Обратно, пусть $\Lambda \in \mathcal{I}_p^*$. Тогда, поскольку $\|A\|_p \leqslant \|A\|_1$, имеем $\Lambda \in \mathcal{I}_1^*$, так что по теореме VI.26 существует некоторый оператор $A \in \mathscr{L}(\mathscr{H})$, такой, что $\Lambda(B) = \operatorname{tr}(AB)$ для всех $B \in \mathscr{I}_1$. Мы хотим показать, что $A \in \mathscr{I}_q$. Его можно представить как $A = D + iC$, где D и C самосопряжены. Поскольку

$$|\operatorname{tr}(A^*B)| = |\operatorname{tr}(AB^*)| \leqslant \|\Lambda\| \|B^*\|_p = \|\Lambda\| \|B\|_p,$$

имеем

$$|\operatorname{tr}(DB)| \leqslant \|\Lambda\| \|B\|_p, \qquad |\operatorname{tr}(CB)| \leqslant \|\Lambda\| \|B\|_p.$$

Итак, достаточно доказать, что $A \in \mathscr{I}_q$ в случае, когда A самосопряжен. Пусть $a > 0$ и $E(a, \infty)$ — спектральные проекторы A, соответствующие интервалу (a, ∞). Предположим, что $E(a, \infty)$ бесконечномерен, и пусть $\{\varphi_n\}$ — ортонормированный базис для $E(a, \infty)$. Если ввести оператор

$$B_M = \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n} P_{\varphi_n}\right) \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^p}\right)^{-1/p},$$

где P_{φ_n} — проектор на φ_n, то $\|B_M\|_p = 1$. Но

$$\operatorname{tr}(AB_M) \geqslant \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{a}{n}\right) \left(\sum_{n=1}^{M} \frac{1}{n^p}\right)^{-1/p} \xrightarrow{M \to \infty} \infty,$$

а это противоречит тому, что $|\operatorname{tr}(AB_M)| \leqslant \|\Lambda\|$. Итак, $E(a, \infty)$ конечномерен, и аналогичное доказательство показывает, что конечномерен $E(-\infty, -a)$. Отсюда следует, что оператор A компактен, а потому может быть представлен как $A = \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n P_{\psi_n}$ для некоторого ортонормированного набора $\{\psi_n\}$. Если $\{\gamma_n\}_{n=1}^{M}$ — произвольная конечная последовательность, такая, что $\left(\sum_{n=1}^{M} |\gamma_n|^p\right)^{1/p} = 1$, то $B_\gamma = \sum_{n=1}^{M} \gamma_n P_{\psi_n} \in \mathscr{I}_p$ и

$$\left|\sum_{n=1}^{M} \gamma_n \mu_n\right| = |\operatorname{tr}(AB_\gamma)| \leqslant \|\Lambda\|,$$

откуда $\{\mu_n\} \in l_q$, поскольку $l_q = l_p^*$. Итак, $(\operatorname{tr}(|A|^q))^{1/q} = (\sum |\mu_n|^q)^{1/q} < \infty$ и $A \in \mathscr{I}_q$. ∎

Предложение 8. Пусть $1 \leqslant p_0 < p_1 \leqslant \infty$, и пусть $X = \mathscr{I}_{p_0}$. Тогда $\|\cdot\|^{(0)} = \|\cdot\|_{p_0}$ и $\|\cdot\|^{(1)} = \|\cdot\|_{p_1}$ — согласованные нормы на X и $X_t = \mathscr{I}_{p_t}$, где $p_t = tp_1^{-1} + (1-t) p_0^{-1}$.

Мы опускаем доказательство предложения 8, так как оно почти совпадает с доказательством из примера 1, за исключением того, что разложение $\varphi(x) = |\varphi(x)| \exp(i \arg \varphi(x))$ заменяется разложением $A = U|A|$, а интегрирование — взятием следа.

Теорема IX.22. Пусть $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{H}_2$—сепарабельные гильбертовы пространства, которым соответствуют пространства операторов $\mathcal{I}_p^{(1)}$ и $\mathcal{I}_q^{(2)}$. Предположим, что T переводит $\mathcal{F}_1$ (операторы конечного ранга в $\mathcal{H}_1$) в $\mathrm{Com}(\mathcal{H}_2)$ и что

(i) $\|T(A)\|_{q_0} \leqslant M_0 \|A\|_{p_0}$ для всех $A \in \mathcal{F}_1$;

(ii) $\|T(A)\|_{q_1} \leqslant M_1 \|A\|_{p_1}$ для всех $A \in \mathcal{F}_1$.

Тогда $\|T(A)\|_{q_t} \leqslant M_1^t M_0^{1-t} \|A\|_{p_t}$ для всех $A \in \mathcal{F}_1$, так что T однозначно продолжается до ограниченного отображения $\mathcal{I}_{p_t}$ в $\mathcal{I}_{q_t}$, где $p_t^{-1} = tp_1^{-1} + (1-t)p_0^{-1}$ и $q_t^{-1} = tq_1^{-1} + (1-t)q_0^{-1}$.

Доказательство. Теорема сразу следует из предложения 8 и интерполяционной теоремы Кальдерона—Лионса. ∎

Пример 3 (оснащенные гильбертовы пространства). Пусть $\mathcal{H}$ — гильбертово пространство и A—положительный самосопряженный оператор в $\mathcal{H}$, причем $\mathrm{Ker}\, A = \{0\}$, так что A^{-1} тоже самосопряжен (как A, так и A^{-1} могут быть неограниченными). Пусть $X = C^\infty(A) \cap C^\infty(A^{-1})$, и для каждого $m \in \mathbb{R}$ пусть $\mathcal{H}_m$ — пополнение X по норме $\|\varphi\|_m = \|A^{m/2}\varphi\|_{\mathcal{H}}$. В силу спектральной теоремы можно считать, что $\mathcal{H} = L^2(M, d\mu)$, где $\langle M, \mu\rangle$—некоторое пространство с мерой, а A—умножение на некоторую функцию $f \geqslant 0$. Очевидно, что $\mathcal{H}_m = L^2(M, f^m d\mu)$, и короткое рассуждение показывает, что нормы $\|\cdot\|_m$ согласованы. Пусть m_0 и m_1 фиксированы и $m_t = tm_1 + (1-t)m_0$. Тогда доказательство, подобное приведенному в примере 1, показывает, что $X_t = \mathcal{H}_{m_t}$. Для доказательства включения $\mathcal{H}_{m_t} \subset X_t$ используется функция $F(z) = f(\cdot)^{zm_1 + (1-z)m_0}$. Для доказательства включения $X_t \subset \mathcal{H}_{m_t}$ используется естественное отождествление $\mathcal{H}_m^*$ с $\mathcal{H}_{-m}$. В задаче 35 читателю предлагается восстановить опущенные детали. Как только пространство X_t отождествлено с $\mathcal{H}_{m_t}$, можно применить абстрактную интерполяционную теорему для формулировки конкретных утверждений об операторах на $\mathcal{H}$. Вот два простых примера.

Предложение 9. Пусть A и B—положительные самосопряженные операторы, имеющие (вообще говоря, неограниченные) обратные, в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$. Пусть T—ограниченное линейное преобразование $\mathcal{H}$ в себя, удовлетворяющее условиям

(i) $\|T\varphi\| \leqslant M_0 \|\varphi\|$ для всех $\varphi \in \mathcal{H}$;

(ii) $T\colon D(A^2) \to D(B^2)$ и $\|B^2 T\varphi\| \leqslant M_1 \|A^2\varphi\|$ для всех $\varphi \in D(A^2)$.

Тогда $T\colon D(A) \to D(B)$ и

$$\|BT\varphi\| \leqslant M_0^{1/2} M_1^{1/2} \|A\varphi\| \text{ для всех } \varphi \in D(A).$$

Предложение 10. Для $m \in \mathbb{R}$ через W_m обозначим m-е пространство Соболева (определение см. в § IX.6). Предположим, что $g \in C^k$ и $D^\alpha g$ ограничены для всех α с $|\alpha| \leqslant k$. Тогда для каждого m, такого, что $|m| \leqslant k$, $f \mapsto gf$ — ограниченное отображение W_m в W_m.

Доказательство. Покажем сначала, что отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. По предложению 1 из § IX.6 функция f тогда и только тогда принадлежит W_k, когда $D^\alpha f \in L^2$ для всех $|\alpha| \leqslant k$. Отсюда легко следует, что норма $\|f\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_{L^2}$ эквивалентна норме $\|f\|_k$ на W_k. Применяя правило Лейбница и учитывая ограниченность производных g, получаем

$$\|gf\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha gf\|_2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_2 = C\|f\|_{k,2}.$$

Итак, отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. В силу двойственности ограничено и g: $W_{-k} \to W_{-k}$. Пространства W_m — это оснащенные гильбертовы пространства, ассоциированные с оператором $-\Delta + I$, так что по интерполяционной теореме отображение g: $W_m \to W_m$ ограничено при каждом m с $|m| \leqslant k$. ∎

Еще одно применение $\mathcal{H}_m$-интерполяционных теорем приведено в доказательстве теоремы X.18. Другой пример интерполирующих пространств см. в задаче 36.

IX.5. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

В этом и следующем разделах мы приведем два приложения преобразования Фурье к изучению дифференциальных уравнений в частных производных. Это — не книга по дифференциальным уравнениям, хотя мы время от времени и обращались к ним, поэтому и здесь наша цель — не детально обсудить технику или сформулировать наиболее сильные результаты, а пояснить и проиллюстрировать применение методов функционального анализа.

Как и в гл. V, $p(x)$ обозначает полином от нескольких переменных $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, а $p(D)$ — дифференциальный оператор в частных производных, получаемый подстановкой $\partial/\partial x_j$ вместо x_j во всех местах, где x_j встречается в $p(x)$.

Определение. **Фундаментальным решением** для дифференциального оператора $p(D)$ называется обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'$, такая, что $p(D)E = \delta$.