Предложение 10. Для $m \in \mathbb{R}$ через W_m обозначим m-е пространство Соболева (определение см. в § IX.6). Предположим, что $g \in C^k$ и $D^\alpha g$ ограничены для всех α с $|\alpha| \leqslant k$. Тогда для каждого m, такого, что $|m| \leqslant k$, $f \mapsto gf$ — ограниченное отображение W_m в W_m.

Доказательство. Покажем сначала, что отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. По предложению 1 из § IX.6 функция f тогда и только тогда принадлежит W_k, когда $D^\alpha f \in L^2$ для всех $|\alpha| \leqslant k$. Отсюда легко следует, что норма $\|f\|_{k,2} = \sum\limits_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_{L^2}$ эквивалентна норме $\|f\|_k$ на W_k. Применяя правило Лейбница и учитывая ограниченность производных g, получаем

$$\|gf\|_{k,2} = \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha gf\|_2 \leqslant C \sum_{|\alpha| \leqslant k} \|D^\alpha f\|_2 = C \|f\|_{k,2}.$$

Итак, отображение g: $W_k \to W_k$ ограничено. В силу двойственности ограничено и g: $W_{-k} \to W_{-k}$. Пространства W_m — это оснащенные гильбертовы пространства, ассоциированные с оператором $-\Delta + I$, так что по интерполяционной теореме отображение g: $W_m \to W_m$ ограничено при каждом m с $|m| \leqslant k$. ∎

Еще одно применение $\mathscr{H}_m$-интерполяционных теорем приведено в доказательстве теоремы X.18. Другой пример интерполирующих пространств см. в задаче 36.

IX.5. Фундаментальные решения дифференциальных уравнений в частных производных с постоянными коэффициентами

В этом и следующем разделах мы приведем два приложения преобразования Фурье к изучению дифференциальных уравнений в частных производных. Это — не книга по дифференциальным уравнениям, хотя мы время от времени и обращались к ним, поэтому и здесь наша цель — не детально обсудить технику или сформулировать наиболее сильные результаты, а пояснить и проиллюстрировать применение методов функционального анализа.

Как и в гл. V, $p(x)$ обозначает полином от нескольких переменных $x = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$, а $p(D)$ — дифференциальный оператор в частных производных, получаемый подстановкой $\partial/\partial x_j$ вместо x_j во всех местах, где x_j встречается в $p(x)$.

Определение. **Фундаментальным решением** для дифференциального оператора $p(D)$ называется обобщенная функция $E \in \mathscr{D}'$, такая, что $p(D) E = \delta$.

Фундаментальные решения интересуют нас по той причине, что если ввести $u=E*f$, где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, то

$$p(D)u=p(D)(E*f)=p(D)E*f=\delta*f=f.$$

Итак, если мы сможем найти фундаментальное решение, то получим теорему существования для всех дифференциальных уравнений в частных производных $p(D)u=f$, где $f\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Более того, если мы сможем найти выражение для E, то найдем явное представление для произвольного решения, а именно $u=E*f$.

Пример (уравнение Пуассона). Для уравнения Пуассона $\Delta u=f$ в трехмерном пространстве фундаментальным решением является функция $E(\mathbf{r})=-1/4\pi r$. В этом легко убедиться следующим образом. Обозначим через B_ε шар радиуса ε с центром в нуле. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$. Тогда

$$\begin{aligned}(\Delta E)(\varphi)&=E(\Delta\varphi)=-\int_{\mathbb{R}^3}\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi\,dx=\\&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{-\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon}\frac{1}{4\pi r}\Delta\varphi\,dx\right\}=\\&=\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\{\int_{\mathbb{R}^3\setminus B_\varepsilon}-\Delta\left(\frac{1}{4\pi r}\right)\varphi\,dx+\int_{\partial B_\varepsilon}\frac{1}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial r}\varphi\,\partial S-\right.\\&\qquad\left.-\int_{\partial B_\varepsilon}\varphi\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{4\pi r}\right)dS\right\},\end{aligned}$$

где dS обозначает обычную меру на поверхности ∂B_ε шара B_ε. Первый член в правой части равен нулю. Второй член сходится к нулю, а третий сходится к $\varphi(0)$ при $\varepsilon\downarrow 0$, так как φ непрерывна в нуле. Итак, $\Delta E(\varphi)=\varphi(0)$, поэтому $\Delta E=\delta$.

Чтобы почувствовать, с какими трудностями связано построение фундаментальных решений, попробуем действовать формально. Нам хотелось бы решить дифференциальное уравнение $p(D)E=\delta$. Совершая преобразование Фурье над обеими частями уравнения, получаем $p(ix)\hat{E}=(2\pi)^{-n/2}$, поэтому следует ожидать, что

$$E=\widecheck{((2\pi)^{n/2}p(ix))^{-1}}.$$

Если $p(ix)$ не имеет вещественных нулей, то для определения E можно обратиться к преобразованию Фурье на $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Однако $p(ix)$ — полином от нескольких переменных и может обладать целым многообразием нулей. Следовательно, функция $p(ix)^{-1}$ не обязана быть локально интегрируемой, а тогда интеграл

$\int p(ix)^{-1}\varphi(x)\,dx$, вообще говоря, не имеет смысла и непосредственная интерпретация $p(ix)^{-1}$ как распределения невозможна. Это напоминает ситуацию, описанную в примерах 6 и 9 из § V.3, где функцию $1/x$ одной переменной нельзя было непосредственно интерпретировать как обобщенную, поскольку она не обладала свойством локальной интегрируемости. Даже в приведенном там простом случае был необходим некоторый предельный переход. Подобно случаю $1/x$ и здесь можно ожидать, что различные предельные процедуры приведут к различным распределениям. И действительно, в общем случае дифференциальное уравнение в частных производных имеет много фундаментальных решений в $\mathscr{D}'$, а иногда больше одного и в $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Теорема Мальгранжа—Эренпрейса утверждает, что каждый дифференциальный оператор в частных производных с постоянными коэффициентами $p(D)$ имеет фундаментальное решение. Доказательство опирается на методы комплексного анализа и теорему Хана—Банаха. Прежде чем привести схему доказательства, мы на простом примере проиллюстрируем ту его часть, которая основана на теореме Хана—Банаха. Рассмотрим оператор $I-\Delta$. В этом случае $p(ix)=1+x^2$ не имеет нулей, так что $\hat{E}=\{(2\pi)^{n/2}(1+x^2)\}^{-1}$—корректно определенная обобщенная функция умеренного роста, а E удовлетворяет уравнению $(I-\Delta)E=\delta$. Приведем теперь другое доказательство существования E, не опирающееся на продолжение фурье-образа на $\mathscr{S}'$. Пусть $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\begin{aligned}|\delta_0(\varphi)|=|\varphi(0)|&\leqslant\|\varphi\|_\infty\leqslant\\ &\leqslant\|\hat{\varphi}\|_1=\|(1+|\lambda|^2)^m\hat{\varphi}(\lambda)\,(1+|\lambda|^2)^{-m}\|_1\leqslant\\ &\leqslant C\|(1+|\lambda|^2)^m\hat{\varphi}(\lambda)\|_2,\end{aligned}$$

где m выбрано достаточно большим, чтобы $(1+|\lambda|^2)^{-m}\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Применяя (IX.1) и теорему Планшереля, получаем

$$\|(1+|\lambda|^2)^m\hat{\varphi}(\lambda)\|_2=\|(1-\Delta)^m\varphi\|_2,$$

а потому

$$|\varphi(0)|\leqslant C\|(1-\Delta)^m\varphi\|_2. \tag{IX.21}$$

Следовательно, отображение $\tilde{T}$ из $(I-\Delta)^m[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]$ в $\mathbb{C}$, заданное как

$$\tilde{T}\colon\ (1-\Delta)^m\varphi\longmapsto\varphi(0),$$

определено и ограничено по L^2-норме. По теореме Хана—Банаха $\tilde{T}$ можно продолжить с $(I-\Delta)^m[C_0^\infty(\mathbb{R}^n)]$ до ограниченного линейного функционала T на всем $L^2(\mathbb{R}^n)$. Из леммы Рисса следует, что существует $t(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)$, для которого

$$\begin{aligned}\delta(\varphi) = \varphi(0) &= T((I-\Delta)^m \varphi) = \\ &= \int t(x)(1-\Delta)^m \varphi\, dx = \\ &= [(1-\Delta)^{m-1}T]((1-\Delta)\varphi).\end{aligned}$$

Если положить $E=(1-\Delta)^{m-1}T$, то очевидно, что $(1-\Delta)E=\delta$.

Теперь мы готовы сформулировать теорему Мальгранжа — Эренпрейса и дать краткую схему ее доказательства.

Теорема IX.23 (теорема Мальгранжа—Эренпрейса). Для любого дифференциального оператора в частных производных с постоянными коэффициентами $p(D)$ на $\mathbb{R}^n$ существует обобщенная функция $E \in \mathcal{D}'$, такая, что $p(D)E=\delta$.

Доказательство. Положим $p^*(x)=p(-x)$ и $q(x)=p^*(ix)$, и пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Из теоремы Пэли — Винера известно, что для каждого $y \in \mathbb{R}^n$

$$\widehat{(p^*(D)\varphi)}(y+\zeta)=\hat{\varphi}(y+\zeta)\,q(y+\zeta)$$

— целая функция $\zeta \in \mathbb{C}^n$. Пусть $Q(x)=\sum_\alpha |D^\alpha q(x)|$. Отметим, что Q положительна и отделена от нуля. На первом шаге доказательства, применяя интегральную формулу Коши, показываем, что

$$\begin{aligned}|Q(x)\hat{\varphi}(x)| &\leqslant C_1 \int_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} |\hat{\varphi}(x+\zeta)\,q(x+\zeta)|\,d^{2n}\zeta = \\ &= C_1 \int_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} |\widehat{p^*(D)\varphi}(x+\zeta)|\,d^{2n}\zeta,\end{aligned}$$

где C_1 зависит от ε, но не зависит от φ, а $d^{2n}\zeta$ — мера Лебега на $\mathbb{C}^n$. Доказательство этого неравенства, использующее комплексный анализ, вынесено в задачу 41.

Воспользовавшись этой оценкой, получим

$$\begin{aligned}|\varphi(0)| &\leqslant (2\pi)^{-n/2} \int_{\mathbb{R}^n} |\hat{\varphi}(y)|\,dy \leqslant \\ &\leqslant C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{|\zeta|\leqslant\varepsilon} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\zeta)|\,|Q(y)|^{-1}\,d^{2n}\zeta \right) dy = \\ &= C_2 \int_{\mathbb{R}^n} \int_{|\lambda|^2+|\mu|^2\leqslant\varepsilon^2} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\lambda+i\mu)|\,|Q(y)|^{-1}\,d\lambda\,d\mu\,dy.\end{aligned}$$

При $|\lambda| \leqslant \varepsilon$ неравенство $Q(y+\lambda)(Q(y))^{-1} \leqslant C_3$ справедливо независимо от y, так что

$$|\varphi(0)| \leqslant C_4 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|\lambda|^2+|\mu|^2 \leqslant \varepsilon^2} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+\lambda+i\mu)|(Q(y+\lambda))^{-1} d\lambda\, d\mu\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|\mu|^2 \leqslant \varepsilon^2} |\widehat{p^*(D)\varphi}(y+i\mu)|(Q(y))^{-1} d\mu\, dy. \qquad \text{(IX.22)}$$

Этот результат заменяет в данном случае простую априорную оценку (IX.21) предыдущего примера (все C_i зависят от ε, но не зависят от φ).

Дальнейшие рассуждения здесь те же, что и в примере. Пусть

$$\|\varphi\|_Q = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|\mu|^2 \leqslant \varepsilon^2} |\hat{\varphi}(y+i\mu)(Q(y))^{-1}|\, d\mu\, dy.$$

Покажем сначала, что $\|\cdot\|_Q$ — непрерывная норма на $\mathscr{D}$. Поскольку функция Q ограничена снизу, имеем

$$\begin{aligned}\|\varphi\|_Q &\leqslant C_6 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \int\limits_{|\mu| \leqslant \varepsilon} |\hat{\varphi}(y+i\mu)|\, d\mu\, dy \leqslant \\ &\leqslant C_7 \sup_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ |\mu| \leqslant \varepsilon}} |(1+y^2)^{n+1}\hat{\varphi}(y+i\mu)| \leqslant \\ &\leqslant C_7 \sup_{|\mu| \leqslant \varepsilon} \|(1-\Delta)^{n+1} e^{\mu\cdot x}\varphi(x)\|_1.\end{aligned}$$

Правая часть — непрерывная норма на $C_0^\infty(K)$ для каждого компактного $K \subset \mathbb{R}^n$. Поскольку $\mathscr{D}$ наделено топологией индуктивного предела, $\|\cdot\|_Q$ — непрерывная норма на $\mathscr{D}$. Основная оценка (IX.22) показывает, что определено отображение

$$\tilde{E}\colon\ p^*(D)\varphi \mapsto \varphi(0).$$

Это означает, что если $p^*(D)\varphi_1 = p^*(D)\varphi_2$, то $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Отображение $\tilde{E}$ непрерывно, поскольку непрерывна норма $\|\cdot\|_Q$. Таким образом, по теореме Хана — Банаха существует некоторое отображение E в $\mathscr{D}'$, продолжающее $\tilde{E}$. Поскольку

$$(p(D)E)(\varphi) = E(p^*(D)\varphi) = \varphi(0),$$

то мы нашли фундаментальное решение для $p(D)$. ∎