IX.6. Эллиптическая регулярность

С омерзением и ужасом я отворачиваюсь от этой зловредной язвы — непрерывных функций, нигде не имеющих производных.

ЭРМИТ, в письме к СТИЛЬТЬЕСУ

Предположим, что u — слабое решение уравнения $-\Delta u = g$ в области Ω. Наша главная цель в этом разделе — доказать, что если функция g на Ω принадлежит C^∞, то и u на Ω принадлежит C^∞. Эта теорема, известная под названием леммы Вейля, имеет много важных обобщений. Мы ограничимся здесь доказательством леммы Вейля, а обсуждение ее обобщений вынесем в Замечания. Важность так называемых теорем «регулярности» состоит в том, что они обеспечивают второй шаг в доказательстве существования классических решений для некоторых классов эллиптических дифференциальных уравнений в частных производных. Сначала, для доказательства существования слабого решения, применяется теорема Хана — Банаха или рассуждения, основанные на самосопряженности (см. § IX.5 или § X.3), а затем с помощью теоремы регулярности доказывается, что каждое слабое решение есть классическое решение. В § V.4 мы отмечали, что уравнение $u_{tt} - u_{xx} = 0$ имеет много слабых решений, которые *не* являются классическими. Различие между двумя случаями: $u_{tt} - u_{xx} = 0$ и $u_{tt} + u_{xx} = 0$ — состоит в том, что полиномы xt, x, t и 1 могут быть все ограничены величиной $C(x^2 + t^2)$, но не $C(x^2 - t^2)$. Читатель увидит, как оценки такого типа входят в доказательство. Хотя теорема регулярности C^∞-типа (или даже C^k-типа) для неэллиптических дифференциальных операторов в частных производных не выполняется, тем не менее существует более слабая теорема регулярности, которую мы обсудим в Замечаниях к § IX.10.

Доказательство леммы Вейля делится на две части. Цель первой — показать, что если $-\Delta u = g$ и если все слабые производные g порядка, меньшего или равного m, суть L^2-функции, то и все слабые производные u порядка, меньшего или равного $m+2$, также представляют собой L^2-функции. Вторая часть, известная как лемма Соболева, показывает, что любая функция из $L^2(\mathbb{R}^n)$, у которой k слабых производных принадлежат $L^2(\mathbb{R}^n)$, где $k > (n/2) + \sigma$, равна (п. в.) некоторой функции из C^σ. Лемма Вейля получается объединением двух этих частей при дополнительном предположении, что $g \in C^\infty$.

Начнем с определения пространств Соболева и перечисления некоторых их важных свойств.

Определение. Говорят, что обобщенная функция $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$ принадлежит **m-му пространству Соболева** W_m ($m \in \mathbb{R}$), если

$\hat{T}$ — измеримая функция и

$$\|T\|_m^2 = \int (1 + |\lambda|^2)^m |\hat{T}(\lambda)|^2 d\lambda < \infty.$$

Пространство W_m является гильбертовым относительно нормы $(T, T)^{1/2} = \|T\|_m$. Как и при исследовании квадратичных форм в § VIII.6, полезно отвлечься от соответствия между W_m^* и W_m, задаваемого леммой Рисса. Вместо этого мы отождествим W_m^* с W_{-m}, сопоставляя элементу $T \in W_{-m}$ функционал на W_m, определяемый формулой

$$T(S) = \int \hat{T}(-\lambda) \hat{S}(\lambda) d\lambda.$$

Такое отождествление естественно, так как оно согласуется со смыслом $T(\varphi)$, когда $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, а T рассматривается как элемент $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Предложение 1. Если m — неотрицательное целое число, то $f \in W_m$ тогда и только тогда, когда $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ для всех α, удовлетворяющих неравенству $|\alpha| \leqslant m$, где $D^\alpha f$ — производная в смысле обобщенных функций.

Доказательство. По теореме IX.2, $\widehat{D^\alpha T} = (i\lambda)^\alpha \hat{T}$ для всех T из $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Если $T \in W_m$, то $(i\lambda)^\alpha \hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m$, поэтому, согласно теореме Планшереля, $D^\alpha T \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Обратно, если $D^\alpha T \in L^2(\mathbb{R}^n)$ для всех α при $|\alpha| \leqslant m$, то $(i\lambda)^\alpha \hat{T} = \widehat{D^\alpha T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| \leqslant m$, поэтому $T \in W_m$. ∎

Предложение 2. Пусть m — целое число. Если $T \in W_m$, а $\varphi \in C^{|m|}$ и имеет ограниченные производные, то $\varphi T \in W_m$.

Доказательство. Если $m \geqslant 0$, то утверждение следует из правила Лейбница и предложения 1. Если $m < 0$, то умножение на φ в W_m сопряжено умножению на φ в $W_{|m|}$ при естественном отождествлении W_m и $W_{|m|}^*$. Поэтому умножение на φ ограничено. ∎

Предложение 2 представляет собой частный случай предложения 10 из дополнения к § IX.4. Мы повторили здесь доказательство этой части предложения 10, так как оно не требует интерполяции.

Определение. Пусть Ω — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. **Локальное пространство Соболева** $W_m(\Omega)$ — это множество обобщенных функций $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, таких, что $\varphi T \in W_m$ для всех $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ с носителем в Ω.

Полезное свойство локальных пространств Соболева дает следующее

Предложение 3. Если Ω—открытая *ограниченная* область в $\mathbb{R}^n$, то каждое $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ лежит в $W_m(\Omega)$ с некоторым m. Это означает, что $\mathscr{D}'(\mathbb{R}^n) = \bigcup\limits_{m=-\infty}^{\infty} W_m(\Omega)$.

Доказательство. Пусть η—функция из $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, тождественно равная единице на $\bar{\Omega}$. Поскольку ηT—распределение с компактным носителем, то, по теореме IX.12, $|\widehat{(\eta T)}(\lambda)| \leqslant C(1+|\lambda|)^M$ для некоторого M. Итак, если p—целое число, большее чем $M+(n/2)$, то $\eta T \in W_{-p}$. По предложению 2, если $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $\operatorname{supp}\varphi \subset \Omega$, то и $\varphi T = \varphi\eta T \in W_{-p}$. Итак, $T \in W_{-p}(\Omega)$. ∎

Теперь мы готовы провести первую часть доказательства леммы Вейля.

Лемма. Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ и Ω—открытое множество в $\mathbb{R}^n$.

(a) Если $T \in W_m$ и $-\Delta T \in W_m$, то $T \in W_{m+2}$. Более того, если $T \in W_m$, то $\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$.

(b) Если $T \in W_m(\Omega)$ и $-\Delta T \in W_m(\Omega)$, то $T \in W_{m+2}(\Omega)$.

(c) Если $T \in W_m$ и m—целое число, то $T \in W_m(\Omega)$.

Доказательство. Для доказательства (a) заметим, что если $T \in W_m$, то $(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, а если $-\Delta T \in W_m$, то $|\lambda|^2(1+|\lambda|^2)^{m/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Итак,

$$(1+|\lambda|^2)^{(m/2)+1}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

и, следовательно, $T \in W_{m+2}$. Далее, если $T \in W_m$, то $\lambda_j(1+|\lambda|^2)^{(m-1)/2}\hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, поэтому $\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$.

Для доказательства (b) отметим сначала, что правило Лейбница справедливо для произведения распределения и функции, т. е.

$$\frac{\partial}{\partial x_j}(\varphi T) = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) T + \varphi \frac{\partial T}{\partial x_j}, \tag{IX.23}$$

$$-\Delta(\varphi T) = (-\Delta\varphi) T - 2\sum \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_j} - \varphi\Delta T. \tag{IX.24}$$

Предположим теперь, что T и $-\Delta T$ лежат в $W_m(\Omega)$. Если $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то, согласно (IX.23) и части (a), $\varphi\partial T/\partial x_j \in W_{m-1}$. Итак, по (IX.24), $-\Delta(\varphi T) \in W_{m-1}$, откуда в силу части (a) находим, что $\varphi T \in W_{m+1}$. Применяя теперь снова (IX.23), получаем, что $\varphi\partial T/\partial x_j \in W_m$, а тогда опять по (IX.24) находим, что $-\Delta(\varphi T) \in W_m$. Итак, из части (a) следует, что $\varphi T \in W_{m+2}$. Поскольку $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ было произвольным, $T \in W_{m+2}(\Omega)$. Это доказывает (b).

(c) следует из предложения 2. ∎

Теорема IX.24 (лемма Соболева). Пусть $T \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, и пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$. Предположим, что $T \in W_m(\Omega)$, где $m > n/2$, и пусть l — неотрицательное целое число, причем $l < m - (n/2)$. Тогда T на Ω равно некоторой функции из C^l.

Доказательство. Начнем со случая, когда $\Omega = \mathbb{R}^n$. Поскольку $T \in W_m$,

$$(1 + |\lambda|^2)^{m/2} \hat{T} \in L^2(\mathbb{R}^n).$$

Так как $(1 + |\lambda|^2)^{-(n/4)-\varepsilon}$ тоже принадлежит $L^2(\mathbb{R}^n)$ при каждом $\varepsilon > 0$, мы заключаем, что

$$(1 + |\lambda|^2)^{-(n/4)-\varepsilon}(1 + |\lambda|^2)^{m/2} \hat{T}(\lambda) \in L^1(\mathbb{R}^n).$$

Следовательно, как только $|\alpha| \leqslant l$, имеем

$$|\lambda^\alpha \hat{T}(\lambda)| \leqslant |\lambda|^l (1 + |\lambda|^2)^{-(m/2)+(n/4)+\varepsilon} G(\lambda),$$

где $G \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Можно выбрать такое $\varepsilon > 0$, что $l < m - (n/2) - 2\varepsilon$, поэтому $\lambda^\alpha \hat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ для каждого $|\alpha| \leqslant l$. По лемме Римана — Лебега

$$T(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\lambda \cdot x} \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

и

$$\mathbf{S}(x) = (2\pi)^{-n/2} \int e^{i\lambda \cdot x} (i\lambda)\, \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

— непрерывные функции со значениями в $\mathbb{R}$ и в $\mathbb{R}^n$ соответственно. Более того, по теореме о мажорированной сходимости отношение

$$\frac{T(x+h) - T(x) - \mathbf{h} \cdot S(x)}{|h|} =$$

$$= (2\pi)^{-n/2} \int \left[\frac{e^{i\lambda \cdot (x+h)} - e^{i\lambda \cdot x} - i\lambda \cdot \mathbf{h} e^{i\lambda \cdot x}}{|h|} \right] \hat{T}(\lambda)\, d\lambda$$

стремится к нулю при $|h| \downarrow 0$. Следовательно, T принадлежит C^1 и $\mathbf{D}T = \mathbf{S}$. Применяя свойство $(1 + |\lambda|^l)\, \hat{T} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и повторяя этот процесс l раз, находим, что $T(x)$ непрерывно дифференцируема l раз.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть η и ψ принадлежат $C_0^\infty(\Omega)$, и предположим, что как η, так и ψ равны единице в окрестности N некоторой точки $x \in \Omega$. Поскольку $T \in W_m(\Omega)$, то ψT и ηT суть C^l-функции на $\mathbb{R}^n$. Далее, должно выполняться равенство $(\psi T)(x) = (\eta T)(x)$, поскольку в противном случае нашлась бы такая функция φ с носителем в N, что $T(\varphi) = (\psi T)(\varphi) \neq (\eta T)(\varphi) = T(\varphi)$. Итак, можно ввести функцию $F(x) = (\psi T)(x)$ на Ω, выбирая в качестве ψ произвольную функцию из $C_0^\infty(\Omega)$, равную единице в окрестности x. В силу доказанного выше $F(x)$ непрерывно дифференцируема l раз.

Доказательство завершается демонстрацией того, что в Ω распределение T задается функцией $F(x)$. Пусть φ, $\alpha \in C_0^\infty(\Omega)$ и $\alpha(x)$ равна единице на $\operatorname{supp}\varphi$. Тогда

$$T(\varphi) = T(\alpha\varphi) = (\alpha T)(\varphi) = \int_\Omega F(x)\,\varphi(x)\,dx. \quad \blacksquare$$

Лемма Соболева допускает обобщения на различные пространства L^p, а при некоторых условиях — на случай $l = m - (n/2)$. Эти обобщения доказываются сложнее, и мы их обсудим в Замечаниях.

Теорема IX.25 (лемма Вейля). Пусть u — слабое решение уравнения $-\Delta u = g$ на $\mathbb{R}^n$. Если g есть C^m-функция на открытом множестве $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то на Ω решение u равно некоторой C^l-функции для каждого $l \in I_+$, удовлетворяющего неравенству $l < m - (n/2) + 2$. В частности, если g принадлежит C^∞ в Ω, то и u принадлежит C^∞ в Ω.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что множество Ω ограничено. Поскольку $\varphi g \in W_m$ для каждого $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, то $g \in W_m(\Omega)$. Согласно предложению 3, $u \in W_k(\Omega)$ для некоторого k, ибо $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$. Если $k < m + 2$, то вследствие условий $u \in W_k(\Omega)$, $-\Delta u = g \in W_k(\Omega)$ и леммы заключаем, что $u \in W_{k+2}(\Omega)$. Повторяя этот процесс, приходим к выводу, что $u \in W_{m+2}(\Omega)$, откуда в силу леммы Соболева следует, что u есть C^l-функция на Ω при $l < m - (n/2) + 2$. $\blacksquare$

Теорема IX.26 (локальная регулярность уравнения Шредингера). Пусть u — слабое решение уравнения $(-\Delta + V)u = Eu$, где V — измеримая функция, а E — комплексное число. Тогда если V есть C^∞-функция на открытой области Ω, то и u бесконечно дифференцируема в этой области.

Доказательство. Не теряя общности, можно считать, что область Ω ограничена. Поскольку $u \in \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$, то, по предложению 3, $u \in W_k(\Omega)$ для некоторого k. Но $V \in C^\infty(\Omega)$, поэтому $Vu \in W_k(\Omega)$ согласно предложению 2. Следовательно, $u \in W_k(\Omega)$ и $-\Delta u \in W_k(\Omega)$, так что по лемме $u \in W_{k+2}(\Omega)$. Повторно применяя лемму, находим, что $u \in \bigcap_{k=-\infty}^{\infty} W_k(\Omega)$, откуда в силу леммы Соболева вытекает, что $u \in C^\infty(\Omega)$. $\blacksquare$

Заметим, что наш метод доказательства теоремы IX.26 можно обобщить и доказать, что если $V \in C^m(\Omega)$, то $u \in C^l(\Omega)$, когда $l < m - (n/2) + 2$ (задача 45).