IX.7. Свободный гамильтониан в нерелятивистской квантовой механике

В этом разделе мы изучим $-\Delta$ как оператор на $L^2(\mathbb{R}^n)$. Для него существуют две разумные области определения:

$$D_{\max}=\{\varphi \mid \varphi\in L^2(\mathbb{R}^n) \text{ и } \Delta\varphi\in L^2(R^n) \text{ в смысле обобщенных функций}\},$$

$$D_{\min}=C_0^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Обозначим $-\Delta\restriction D_{\max}$ через $T_{\max}$, а $-\Delta\restriction D_{\min}$ через $T_{\min}$.

Теорема IX.27.

(a) $\varphi\in D_{\max}$ тогда и только тогда, когда $|\lambda|^2\hat{\varphi}(\lambda)\in L^2(\mathbb{R}^n)$, и в этом случае $T_{\max}\varphi=(|\lambda|^2\hat{\varphi}(\lambda))^\vee$.

(b) $T_{\max}$ самосопряжен.

(c) $T_{\min}$ в существенном самосопряжен и $\overline{T}_{\min}=T_{\max}$.

Доказательство. (а) немедленно следует из формулы $\widehat{-\Delta T}=|\lambda|^2\hat{T}$, справедливой для произвольной обобщенной функции умеренного роста. По предложению 1 из § VIII.3 умножение на $|\lambda|^2$ самосопряжено на $\{\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n) \mid |\lambda|^2\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)\}$. Поскольку преобразование Фурье $\mathcal{F}$ унитарно и $T_{\max}=\mathcal{F}^{-1}|\lambda|^2\mathcal{F}$, то $T_{\max}$ самосопряжен на $D_{\max}$.

Для доказательства того, что $T_{\min}$ в существенном самосопряжен, достаточно показать, что $T^*_{\min}=T_{\max}$, поскольку тогда $\overline{T}_{\min}=T^{**}_{\min}=T_{\max}$. Предположим, что $\psi\in D(T^*_{\min})$. Тогда $(-\Delta\varphi,\psi)=(T_{\min}\varphi,\psi)=(\varphi,T^*_{\min}\psi)$ для всех $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Значит, $-\Delta\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ в смысле обобщенных функций, поэтому $\psi\in D_{\max}$ и $T^*_{\min}\psi=-\Delta\psi=T_{\max}\psi$. Обратно, предположим, что $\psi\in D_{\max}$. Тогда $-\Delta\psi\in L^2(\mathbb{R}^n)$, так что для всех $\varphi\in C_0^\infty$ имеем $(-\Delta\varphi,\psi)=(\varphi,-\Delta\psi)$. Следовательно, $\psi\in D(T^*_{\min})$ и $T^*_{\min}\psi=-\Delta\psi$. ∎

Определение. Обозначим оператор $-\Delta$ с областью определения $D_{\max}$ через H_0 и назовем его **свободным гамильтонианом.**

В оставшейся части этого раздела мы применяем преобразование Фурье и оценки из § IX.4 к изучению различных свойств оператора H_0. Сначала мы докажем теорему, описывающую более подробно свойства функций из $D(H_0)$. Далее выведем явные формулы для $R_\lambda(H_0)$ и e^{itH_0}. И наконец мы докажем некоторые асимптотические свойства экспоненты e^{itH_0}, которые будут полезны при изучении теории рассеяния в гл. XII.

Так как H_0 самосопряжен, то и его степени H_0^m самосопряжены. Поскольку $H_0^m=\mathcal{F}^{-1}|\lambda|^{2m}\mathcal{F}$, область определения H_0^m — не что иное, как пространство Соболева W_{2m}, введенное в § IX.6. Из леммы Соболева (теорема IX.24) немедленно следует такое

Предложение. Вектор $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ принадлежит $C^\infty(H_0) = \bigcap_{m=1}^{\infty} D(H_0^m)$ тогда и только тогда, когда $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ и $D^\alpha\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ для каждого α.

Более важно то, что сами векторы из $D(H_0)$ обладают следующими свойствами.

Теорема IX.28. Пусть $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ лежит в $D(H_0)$. Тогда

(a) Если $n \leqslant 3$, то φ — ограниченная непрерывная функция и для любого $a > 0$ существует некоторая константа b, не зависящая от φ, такая, что

$$\|\varphi\|_\infty \leqslant a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|. \tag{IX.25}$$

(b) Если $n \geqslant 4$ и $2 \leqslant q < 2n/(n-4)$, то $\varphi \in L^q(\mathbb{R}^n)$ и для любого $a > 0$ существует константа b (зависящая только от q, n и a), такая, что

$$\|\varphi\|_q \leqslant a\|H_0\varphi\| + b\|\varphi\|. \tag{IX.26}$$

Доказательство. Согласно лемме Римана—Лебега и теореме Планшереля, утверждение (a) будет доказано, если показать, что $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leqslant a\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + b\|\hat{\varphi}\|_2. \tag{IX.27}$$

Докажем (IX.27) в случае $n = 3$. Пусть $\varphi \in D(H_0)$; тогда $(1+\lambda^2)\hat{\varphi}$ и $(1+\lambda^2)^{-1}$ принадлежат $L^2(\mathbb{R}^3)$, так что $\hat{\varphi} \in L^1(\mathbb{R}^3)$ и в силу неравенства Шварца

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leqslant c\|(\lambda^2+1)\hat{\varphi}\|_2 \leqslant c(\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|_2), \tag{IX.28}$$

где $c^2 = \int (1+\lambda^2)^{-2}\,d\lambda$. Для любого $r > 0$ положим $\hat{\varphi}_r(\lambda) = r^3\hat{\varphi}(r\lambda)$. Тогда $\|\hat{\varphi}_r\|_1 = \|\hat{\varphi}\|_1$, $\|\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{3/2}\|\hat{\varphi}\|_2$ и $\|\lambda^2\hat{\varphi}_r\|_2 = r^{-1/2}\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2$. Итак, применяя (IX.28) к $\hat{\varphi}_r$, вследствие предыдущих неравенств получаем

$$\|\hat{\varphi}\|_1 \leqslant cr^{-1/2}\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + cr^{3/2}\|\hat{\varphi}\|_2$$

для любого $r > 0$. Если выбрать r достаточно большим, то получаем (IX.27).

В силу неравенства Хаусдорфа—Юнга и теоремы Планшереля для доказательства утверждения (b) необходимо лишь показать, что для любого p, удовлетворяющего неравенствам $2n/(n+4) < p \leqslant 2$, и любого $a > 0$ существует такая константа b, что

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leqslant a\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + b\|\hat{\varphi}\|_2.$$

Согласно неравенству Гёльдера,

$$\|\hat{\varphi}\|_p^p \leqslant \|(1+\lambda^2)^{-p}\|_r \|(1+\lambda^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s,$$

где $r^{-1}+s^{-1}=1$. Выбирая $s=2/p$, с помощью неравенства треугольника находим

$$\|(1+\lambda^2)^p |\hat{\varphi}|^p\|_s = (\|(1+\lambda^2)|\hat{\varphi}|\|_2)^p \leqslant$$
$$\leqslant (\|\hat{\varphi}\|_2 + \|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2)^p.$$

Итак, если $\|(1+\lambda^2)^{-p}\|_{2(2-p)^{-1}} = c_1 < \infty$, то

$$\|\hat{\varphi}\|_p \leqslant c_1^{1/p} (\|\lambda^2\hat{\varphi}\|_2 + \|\hat{\varphi}\|_2).$$

Но

$$\|(1+\lambda^2)^{-p}\|_{2(2-p)^{-1}}^{2(2-p)^{-1}} = \int \frac{d\lambda}{(1+\lambda^2)^{2p(2-p)^{-1}}} < \infty,$$

если $4p(2-p)^{-1} > n$, т. е. если $p > 2n/(4+n)$. Метод доказательства того, что константа перед $\|\lambda^2\hat{\varphi}\|$ может быть выбрана сколь угодно малой, тот же, что и в части (а). ∎

Как мы увидим в § X.2, часть (b) этой теоремы справедлива в случае $n \geqslant 5$ и $q = 2n/(n-4)$ при некотором фиксированном a.

Обратимся теперь к выводу явных формул для $(H_0-E)^{-1}$, где $E \in \mathbb{C} \setminus [0, \infty)$, и e^{-iH_0t}, где $\operatorname{Im} t \leqslant 0$. Поскольку $H_0 = \mathcal{F}^{-1}\lambda^2\mathcal{F}$, то $f(H_0) = \mathcal{F}^{-1} f(\lambda^2)\mathcal{F}$, где f — произвольная ограниченная измеримая функция. Это означает, что как $(H_0-E)^{-1}$, так и e^{-iH_0t} могут быть выражены через операторы умножения:

$$(H_0-E)^{-1} = \mathcal{F}^{-1}(\lambda^2-E)^{-1}\mathcal{F}; \qquad e^{-iH_0t} = \mathcal{F}^{-1}e^{-i\lambda^2t}\mathcal{F}.$$

Поскольку преобразование Фурье переводит умножение в свертку, мы получим простые выражения для $(H_0-E)^{-1}$ и e^{-iH_0t} в виде свертки.

Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Обозначим оператор $\varphi \mapsto \check{(f\hat{\varphi})}$ на $L^2(\mathbb{R}^n)$ через $f(-i\nabla)$. Отметим, что $f(-i\nabla)$ — корректно определенный ограниченный оператор в силу ограниченности умножения на f.

Теорема IX.29. Пусть $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Если (i) $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *или* (ii) $\check{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, то

$$(f(-i\nabla)\varphi)(x) = (2\pi)^{-n/2} \int \check{f}(x-y)\varphi(y)\,dy \qquad \text{(IX.29)}$$

для всех $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Интеграл сходится при всех x в случае (i) и при почти всех x в случае (ii).

Доказательство. Предположим, что $f \in L^2 \cap L^\infty$ и $\varphi \in \mathcal{S}$. Тогда $f \in \mathcal{S}'$, так что по теореме IX.4

$$f(-i\nabla)\varphi \equiv \check{(f\hat{\varphi})} = (2\pi)^{-n/2}\check{f} * \varphi =$$
$$= (2\pi)^{-n/2} \int \check{f}(y)\varphi(x-y)\,dy;$$

следовательно, (IX.29) выполняется, если $\varphi\in\mathcal{S}$. Для $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ можно найти такую последовательность $\varphi_m\in\mathcal{S}$, что $\varphi_m\xrightarrow{L^2}\varphi$. Поскольку $f\in L^\infty$, то $f\hat{\varphi}_m\xrightarrow{L^2}f\hat{\varphi}$, а тогда и $f(-i\nabla)\varphi_m\to f(-i\nabla)\varphi$. Итак, можно выбрать последовательность (также обозначаемую $\{\varphi_m\}$), такую, что $f(-i\nabla)\varphi_m\to f(-i\nabla)\varphi$ поточечно п. в. Поскольку $\check{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$,

$$\lim_{m\to\infty}(f(-i\nabla)\varphi_m)(x)=\lim_{m\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\int\check{f}(x-y)\varphi_m(y)\,dy=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\int\check{f}(x-y)\varphi(y)\,dy$$

для каждого $x\in\mathbb{R}^n$. Итак, (IX.29) доказано в случае (i).

Для доказательства (IX.29) в случае (ii) заметим, что если f_m и φ принадлежат $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, то $f_m(-i\nabla)\varphi=(2\pi)^{-n/2}\check{f}_m*\varphi$. Выберем $f_m\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ так, чтобы $\check{f}_m\xrightarrow{L^1}\check{f}$. Тогда $f_m\xrightarrow{L^\infty}f$, следовательно, $f_m\hat{\varphi}\xrightarrow{L^2}f\hat{\varphi}$. Отсюда

$$f(-i\nabla)\varphi=\lim_{m\to\infty}(2\pi)^{-n/2}\check{f}_m*\varphi=$$
$$=(2\pi)^{-n/2}\check{f}*\varphi$$

в силу неравенства Юнга. Поскольку ограниченные операторы $f(-i\nabla)$ и свертка с $(2\pi)^{-n/2}\check{f}$ совпадают на $\mathcal{S}$, они совпадают на всем $L^2(\mathbb{R}^n)$. То, что свертка задается абсолютно сходящимся интегралом, доказано в примере 1 из § IX.4 ∎

Пример 1 (свободная резольвента, $n=3$). Пусть $E=-\varkappa^2$, где $\mathrm{Re}\,\varkappa>0$. Таким образом, $E\in\rho(H_0)$. Поскольку $f(\lambda)\equiv(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}\in L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$, то можно применить часть (i) теоремы IX.29 и вычислить $(H_0-E)^{-1}$. Поскольку $f\in L^2$,

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f}(x)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-3}\int\limits_{|\lambda|\leqslant R}\frac{e^{i\lambda\cdot x}}{\lambda^2+\varkappa^2}\,d\lambda.$$

Переходя к сферическим координатам, положим $u=\cos\sigma=\lambda\cdot x/|x||\lambda|$ и $r=|\lambda|$. Тогда

$$(2\pi)^{-3/2}\check{f}(x)=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,(2\pi)^{-2}\int\limits_0^R\int\limits_{-1}^1\frac{e^{ir|x|u}}{r^2+\varkappa^2}\,r^2\,dr\,du=$$
$$=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{(2\pi)^{-2}}{i|x|}\int\limits_{-R}^R\frac{e^{ir|x|}r}{r^2+\varkappa^2}\,dr=$$
$$=\underset{R\to\infty}{\mathrm{l.i.m.}}\,\frac{(2\pi)^{-2}}{i|x|}\int\limits_{C_R}\frac{\tilde{r}e^{i\tilde{r}|x|}}{(\tilde{r}+i\varkappa)(\tilde{r}-i\varkappa)}\,d\tilde{r},$$

где $\tilde{r}$ лежит в комплексной плоскости r, а контур C_R — ломаная, показанная на рис. IX.5. Для каждого $|x|$ предел существует и равен $e^{-\varkappa|x|}/4\pi|x|$. Значит, по теореме IX.29

$$(n=3) \qquad [(H_0+\varkappa^2)^{-1}\varphi](x)=(4\pi)^{-1}\int \frac{e^{-\varkappa|x-y|}}{|x-y|}\varphi(y)\,dy. \qquad \text{(IX.30)}$$

Функцию $G_0(x, y; E)=e^{-\varkappa|x-y|}/4\pi|x-y|$ часто называют **свободной функцией Грина.**

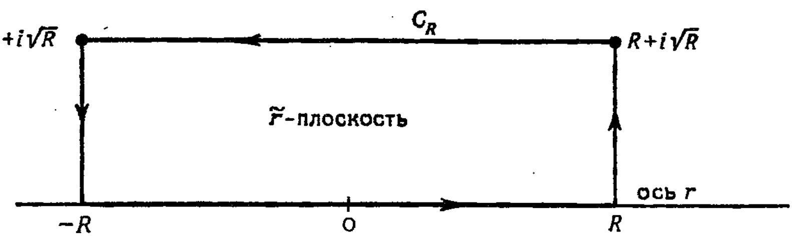

Рис. IX.5. Контур C_R.

Пример 2 (свободная резольвента, $n\neq 3$). Если n не равно 1 или 3, вычислить обратное преобразование Фурье от $(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}$ не так просто, как в примере 1; оно выражается через функции Бесселя. Нетрудно видеть, однако, что если $f(\lambda)=(\lambda^2+\varkappa^2)^{-1}$, то $\check{f}\in L^1(\mathbb{R}^n)$ (см. пример 6 из § IX.10 и задачу 49). Итак, мы оказываемся в рамках случая (ii) теоремы IX.29. Дополнительные свойства функций Грина даны в задаче 49.

Пример 3 (свободный пропагатор). Мы хотим вывести явную формулу для e^{-iH_0t}, $t\in\mathbb{R}$, — унитарной группы, определяющей свободную квантовую динамику. Функция $e^{-i\lambda^2 t}$ не удовлетворяет ни одному из условий теоремы IX.29, поэтому поступим следующим образом. Предположим, что $\alpha\in\mathbb{C}$ и $\operatorname{Re}\alpha>0$. Тогда

$$e^{-\lambda^2\alpha}\in L^2(\mathbb{R}^n)\cap L^\infty(\mathbb{R}^n),$$

так что

$$(e^{-H_0\alpha}\varphi)(x)=\left(\frac{1}{4\pi\alpha}\right)^{n/2}\int e^{-|x-y|^2/4\alpha}\varphi(y)\,dy,$$

поскольку $\mathcal{F}^{-1}(e^{-\lambda^2\alpha})=(2\alpha)^{-n/2}e^{-x^2/4\alpha}$ (пример 1 из § IX.1). Предположим теперь, что $\varphi\in L^1\cap L^2$. Поскольку $e^{-i(t-i\varepsilon)H_0}\varphi\xrightarrow{L^2}e^{-itH_0}\varphi$ при $\varepsilon\downarrow 0$, можно выбрать подпоследовательность, сходящуюся поточечно п. в. Итак,

$$\begin{aligned}(e^{-itH_0}\varphi)(x) &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(e^{-i(t-i\varepsilon)H_0}\varphi)(x) = \\ &= \lim_{\varepsilon\downarrow 0}(4\pi i(t-i\varepsilon))^{-n/2}\int e^{-|x-y|^2/4i(t-i\varepsilon)}\varphi(y)\,dy = \\ &= (4\pi it)^{-n/2}\int e^{i|x-y|^2/4t}\varphi(y)\,dy\end{aligned}$$

по теореме о мажорированной сходимости. Для произвольной $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$ теперь можно применить прием из § IX.2 и заключить, что

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) = \text{l.i.m.}\,(4\pi it)^{-n/2}\int e^{i|x-y|^2/4t}\varphi(y)\,dy. \qquad \text{(IX.31)}$$

Функцию $P_0(x, y;\ t) = (4\pi it)^{-n/2}e^{i|x-y|/4t}$ часто называют **свободным пропагатором.**

Чтобы показать, сколь полезны эти явные формулы, выведем из (IX.31) два следствия, применяемые в теории рассеяния. Первое из них — оценка, отражающая расплывание свободных волновых пакетов.

Теорема IX.30. Пусть H_0 — свободный гамильтониан на $\mathbb{R}^n$. Пусть $2\leqslant q\leqslant\infty$ и $p=(1-q^{-1})^{-1}$. Тогда

$$\|e^{-itH_0}\varphi\|_q \leqslant t^{-n(p^{-1}-1/2)}\|\varphi\|_p. \qquad \text{(IX.32)}$$

Доказательство. Так как оператор e^{-itH_0} унитарен на $L^2(\mathbb{R}^n)$, то $\|e^{-itH_0}\varphi\|_2 = \|\varphi\|_2$. Если $\varphi\in L^1\cap L^2$, то из (IX.31) следует, что $\|e^{-itH_0}\varphi\|_\infty \leqslant (4\pi t)^{-n/2}\|\varphi\|_1$. По теореме Рисса—Торина e^{-itH_0} однозначно продолжается до отображения из $L^p(\mathbb{R}^n)$ в $L^q(\mathbb{R}^n)$ и справедлива оценка (IX.32). ∎

Другое приложение формулы (IX.31) — доказательство явной асимптотической формулы для e^{-itH_0}.

Теорема IX.31. Пусть H_0 — свободный гамильтониан на $\mathbb{R}^n$, и предположим, что $\varphi\in L^2(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(e^{-itH_0}\varphi)(x) \longrightarrow (2it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\hat\varphi(x/2t) \qquad \text{(IX.33)}$$

в том смысле, что L^2-норма разности левой и правой частей стремится к нулю при $t\to\infty$.

Доказательство. Для фиксированного t отображение V_t: $\varphi\mapsto$ $\mapsto (2it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\hat\varphi(x/2t)$ унитарно, поэтому необходимо лишь доказать утверждение теоремы для $\varphi\in\mathscr{S}$, а затем применить $\varepsilon/3$-прием. Поскольку

$$e^{i|x-y|^2/4t} = e^{ix^2/4t}e^{-ix\cdot y/2t}e^{iy^2/4t},$$

из (IX.31) имеем

$$(e^{-iH_0t}\varphi)(x)-(V_t\varphi)(x)=(4\pi it)^{-n/2}e^{ix^2/4t}\cdot\int(e^{iy^2/4t}-1)e^{-ix\cdot y/2t}\varphi(y)\,dy=$$
$$=\frac{e^{ix^2/4t}}{(2it)^{n/2}}\hat{G}_t\left(\frac{x}{2t}\right),$$

где $G_t(y)=(e^{iy^2/4t}-1)\varphi(y)$. Следовательно,

$$\|e^{-iH_0t}\varphi-V_t\varphi\|_2=(2t)^{-n/2}\|\hat{G}_t(\cdot/2t)\|_2=\|\hat{G}_t(\cdot)\|_2=\|G_t\|_2\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{4t}\|y^2\varphi(y)\|_2\to 0 \text{ при } t\to\infty.$$

На предпоследнем шаге мы воспользовались оценкой

$$|e^{iy^2/4t}-1|=\left|\int_0^{y^2/4t}\frac{d}{dx}(e^{ix})\,dx\right|\leqslant\frac{y^2}{4t}. \blacksquare$$

Формула (IX.33) допускает простую физическую интерпретацию. Чтобы убедиться в этом, введем массу, полагая $H_0=(-1/2m)\Delta$. Если система при $t=0$ находится в состоянии φ, то по (IX.33) асимптотическая плотность вероятности для координаты равна $(m/t)^n\cdot|\hat{\varphi}(mx/t)|^2$. Но $|\hat{\varphi}(\lambda)|^2$—начальная плотность вероятности для импульса. Значит, при больших временах вероятность обнаружить частицу в точке x в момент времени t пропорциональна вероятности того, что в начальный момент она обладала импульсом mx/t. Следовательно, при больших временах квантовая свободная частица ведет себя подобно свободной классической, начавшей движение из $x=0$ в момент $t=0$ с плотностью импульса $|\check{\varphi}(\lambda)|^2$.

IX.8. Аксиомы Гординга—Вайтмана

В этом разделе мы обсудим некоторые приложения преобразования Фурье к теории квантовых полей. Читателю не обязательно обладать предварительным опытом в квантовой теории поля. Мы начнем с краткой истории проблемы, сформулируем аксиомы Вайтмана и определим функции Вайтмана. Затем мы применим преобразование Фурье для доказательства свойств аналитичности вайтмановых функций, наброска доказательства PCT-теоремы и вывода представления Челлена—Лемана для двухточечной функции. В дополнении мы рассмотрим лоренц-инвариантные меры.

Квантовая теория поля родилась в двадцатые годы из попытки соединить квантовую механику и специальную теорию относительности в квантовом обобщении классических моделей электромагнитных явлений. С тех пор теория поля широко при-